Solucionario Aritmética 3.°

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 8) Unidad 1

Comunicación matemática

1. Los enunciados I, II y IV son proposiciones ya que se les puede asignar un valor de verdad.
Los enunciados III, V y VI no son proposiciones lógicas.

Clave A

2.

3.

Razonamiento y demostración

4. $\sim p \Rightarrow q \equiv F$

$\downarrow \quad \downarrow$

F F

Se tiene: $p \equiv F$; $q \equiv F$

Luego:

I. $(\sim p \vee q) \vee r$
$(V \vee F) \vee r$
$V \vee r \equiv V$

II. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
$(F \Rightarrow F) \Rightarrow F$
$V \Rightarrow F \equiv F$

$\therefore$ I. (V); II. (F)

Clave B

5.

I. $\underbrace{1+2=12}_{F} \Rightarrow \underbrace{4>8}_{F}$
V

II. $\underbrace{1 \times 2 > 2}_{F} \wedge \underbrace{2+10=12}_{V}$
F

III. $\underbrace{4^2 = 2^4}_{V} \wedge \underbrace{2^3 = 7}_{F}$
V

Clave E

Resolución de problemas

6.

p	q	(p	∨	~q)	⇒	(p	∧	~q)
V	V	V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	F
F	F	F	V	V	F	F	F	V

El operador principal es: FVVF

$\therefore$ El número de valores verdaderos es 2.

Clave C

7. $\underbrace{p}_{V} \Rightarrow \underbrace{(\sim q \vee r)}_{F} \equiv F$

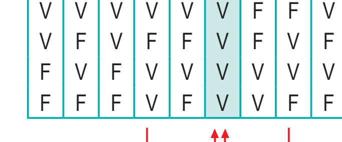
$\underbrace{\sim q}_{F} \vee \underbrace{r}_{F} \equiv F \Rightarrow q = V$

p es V, q es V, r es F.

El valor de verdad de:
$(q \wedge r) \Rightarrow (q \vee \sim r)$
$\underbrace{(V \wedge F)}_{F} \Rightarrow \underbrace{(V \vee V)}_{V} \equiv V$
$\therefore (q \wedge r) \Rightarrow (q \vee \sim r) \equiv V$

Clave A

8.



p	q	(p	⇒	q)	∨	(~p	⇔	q)
V	V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V	F
F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	F	F

La matriz principal es: VVVV

Por lo tanto, es una tautología.

Clave A

9. Simplificando:
$\sim[(p \Rightarrow \sim q) \wedge \sim p]$
$\equiv \sim[(\sim p \vee \sim q) \wedge \sim p]$
$\equiv \sim[\sim(p \wedge q) \wedge \sim p]$
$\equiv (p \wedge q) \vee p \equiv p$

Clave C

10.

p	q	(p	α	~q)	⇒	~p
V	V	V	F	F	V	F
V	F	V	F	V	V	F
F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V

Clave B

Nivel 2 (página 8) Unidad 1

Comunicación matemática

11. Los enunciados I y III son proposiciones lógicas, ya que se les puede asignar un valor de verdad.
Los enunciados II, IV, V y VI no son proposiciones lógicas.

Clave D

12.

Razonamiento y demostración

13. $\underbrace{(\sim p \Rightarrow q)}_{F} \vee \underbrace{r}_{F} \equiv F$

$\sim p \Rightarrow q \equiv F$
$\downarrow \quad \downarrow$
F F

Se tiene: $p \equiv F$; $q \equiv F$; $r \equiv F$

Luego:

I. $(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow r)$
$(F \Rightarrow V) \wedge (V \Rightarrow F)$
$(V) \wedge (F) \equiv F$

II. $(\sim q \Rightarrow \sim r) \vee (p \Leftrightarrow r)$
$(V \Rightarrow V) \vee (F \Leftrightarrow F)$
$(V) \vee (V) \equiv V$

Clave C

14.

I. Si: $\underbrace{5+3=7}_{F}$, entonces $\underbrace{8<7}_{F}$ $\Rightarrow$ $\equiv$ V

II. $\underbrace{\text{9 es mayor que 5}}_{V}$ ó $\underbrace{\text{4 es menor que 3}}_{F}$. $\vee$ $\equiv$ V

III. $\underbrace{\sqrt{25} = 5}_{V}$, sin embargo, $\underbrace{-4^2 = 16}_{F}$. $\wedge$ $\equiv$ F

IV. $3<4$ si solo si $13+6<5+6$.
$\underbrace{3<4}_{V}$ si solo si $\underbrace{19<11}_{F}$ $\Leftrightarrow$ $\equiv$ F

$\therefore$ VVFF

Clave E

Resolución de problemas

15. $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
$\sim(\sim p \wedge q) \vee (q \Rightarrow p)$
$(p \vee \sim q) \vee (\sim q \vee p)$
$(p \vee p) \vee (\sim q \vee \sim q)$
$p \vee \sim q$

Clave B

16. $\underbrace{(p \wedge \sim q)}_{V} \Rightarrow \underbrace{[(m \,\Delta\, r) \vee \sim r]}_{F} \equiv F$

- $p \wedge \sim q \equiv V$
Entonces: $p \equiv V$; $q \equiv F$

- $\underbrace{(m \,\Delta\, r)}_{F} \vee \sim r \equiv F$ ($\sim r$ ↓ V)

Entonces: $m \equiv V$
Por lo tanto, los valores de verdad de p, q, m y r son: VFVV.

Clave B

17.

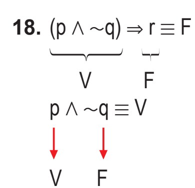
p	q	(~p	⇒	q)	⇔	(p	∨	~q)
V	V	F	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	V	V

La matriz principal es: VVFF

Por lo tanto, es una contingencia.

Clave C

18. $\underbrace{(p \wedge \sim q)}_{V} \Rightarrow \underbrace{r}_{F} \equiv F$



$p \wedge \sim q \equiv V$

$p \downarrow V \qquad \sim q \downarrow F$

Entonces:
$p \equiv V; \quad q \equiv F; \quad r \equiv F$

Clave B

19. Elaboramos la tabla de verdad.

p	q	[(p	⇒	~q)	Δ	(~p	∧	~q)]	⇒	p
V	V	V	F	F	V	F	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	V	V	F	V	V	V	V	F

∴ El esquema es consistente o contingente.

Clave B

20.

p	q	[(p	∧	q)	θ	~q]	θ	p
V	V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	V	V	V	F

Clave D

Nivel 3 (página 9) Unidad 1

Comunicación matemática

21.

22.

Razonamiento y demostración

23. $\underbrace{(p \wedge q)}_{V} \Rightarrow \underbrace{(\sim s \vee t)}_{F} \equiv F$

$\underbrace{p}_{V} \wedge \underbrace{q}_{V} \equiv V \qquad \underbrace{\sim s}_{F} \vee \underbrace{t}_{F} \equiv F$

$\underbrace{\sim s}_{V} \equiv F$

Los valores de verdad de p, q, s, t son: VVVF

Clave B

24. $\underbrace{(p \wedge q)}_{V} \Rightarrow \underbrace{(\sim q \vee \sim r)}_{F} \equiv F$

$\underbrace{p}_{V} \wedge \underbrace{q}_{V} \equiv V \qquad \underbrace{\sim q}_{F} \vee \underbrace{\sim r}_{F} \equiv F$

$q \equiv V \qquad r \equiv V$

p es V, q es V, r es V.

I. $(p \Leftrightarrow \sim q) \vee (\sim r \wedge q)$

$\underbrace{(V \Leftrightarrow F)}_{F} \vee \underbrace{(F \wedge V)}_{F} \equiv F$

II. $\sim(p \vee \sim r) \Leftrightarrow (\sim q \vee \sim p)$

$\underbrace{\sim(V \vee F)}_{\sim(V)} \Leftrightarrow (F \vee F)$

$\underbrace{\sim(V)}_{F} \Leftrightarrow F \equiv V$

∴ FV

Clave C

Resolució de problemas

25.

p	q	t	(p Δ t)	⇒	(q ⇒ t)
V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V

n.° verdaderos: a = 7
n.° falsos: b = 1

Piden: a − b = 7 − 1

∴ a − b = 6

Clave D

26. Simplificamos:

$\sim[p \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)] \vee \underbrace{(r \wedge \sim r)}$

$\sim[p \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)] \vee \quad F$

$\sim[p \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)]$

$\sim[\sim p \vee (\sim p \wedge \sim q)]$

$\sim[\sim p]$

p

Clave E

27. • $\underbrace{\underbrace{[p \Rightarrow (\sim r \Leftrightarrow s)]}_{F} \vee \underbrace{q}_{F}}_{F}$

Luego: $\underbrace{\underbrace{p}_{V} \Rightarrow \underbrace{(\sim r \Leftrightarrow s)}_{F}}_{F}$

Entonces: p = V; q = F

• $\underbrace{\underbrace{\sim r}_{F} \vee \underbrace{[\sim s \vee (p \wedge \sim s)]}_{F}}_{F}$

Luego: $\underbrace{\underbrace{\sim s}_{F} \vee \underbrace{(p \wedge \sim s)}_{F}}_{F}$

Entonces: r = V; s = V

∴ VFVV

Clave C

28.

p	q	r	{[(p	⇔	q)	Δ	r]	⇒	~	(q	∧	~r)}	∨	p
V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V	V	V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	V	F	F	V	F	V	V	V	V	F
F	F	V	F	V	F	F	V	V	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	V	F	V	F	V	V	F	F	V	V	F

Tautológico

Clave A

29. Reemplazamos p □ q ≡ ~p ∨ q en el esquema molecular:

$\underbrace{[(\sim p \vee p) \wedge p]}_{p} \;\square\; \underbrace{\sim(\sim q \vee p)}_{(q \wedge \sim p)}$

$\underbrace{\sim p \vee (q \wedge \sim p)}_{\sim p}$

Clave B

30. Tenemos:

$\{[(s \wedge p) \vee p] \wedge q\} \Rightarrow \sim[(r \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow q)]$

$\equiv \{p \wedge q\} \Rightarrow \sim[(\sim r \vee p) \wedge (q \vee \sim r)]$

$\equiv (p \wedge q) \Rightarrow \sim[(p \wedge q) \vee \sim r]$

$\equiv (p \wedge q) \Rightarrow [\sim(p \wedge q) \wedge r]$

$\equiv \sim(p \wedge q) \vee [\sim(p \wedge q) \wedge r]$

$\equiv \sim(p \wedge q)$

$\equiv \sim p \vee \sim q$

$\equiv p \Rightarrow \sim q \equiv p \,\nabla\, q$

Clave C

31. $\underbrace{[\underbrace{(p \wedge q)}_{V} \rightarrow \underbrace{s}_{F}]}_{F} \vee \underbrace{(\underbrace{q}_{V} \wedge \underbrace{s}_{F})}_{F} \equiv F$

- $\underbrace{p}_{V} \wedge \underbrace{q}_{V} = V; \quad s = F$

Reemplazando, obtenemos:

I. $[(p \,\Delta\, s) \Leftrightarrow q] \vee p$

$[(V \,\Delta\, F) \Leftrightarrow V] \vee V$

$\underbrace{[V \Leftrightarrow V]}_{V} \vee V$

$\underbrace{V \vee V}_{V}$

II. $(s \Rightarrow q) \wedge (s \wedge p)$

$\underbrace{(F \Rightarrow V)}_{V} \wedge \underbrace{(F \vee V)}_{V}$

$\underbrace{V \wedge V}_{V}$

Clave A

Nivel 1 (página 13) Unidad 1

Comunicación matemática

1. Tenemos: $A = \{2; \{2\}; \{4; \{3\}\}; \{2; 5\}\}$

Entonces:

I. $\{2; 5\} \in A$ — V

II. $\{\{2; 5\}\} \in A$ — F

III. $\{3\} \notin A$ — F

IV. $\{2\} \in A$ — V

2. Se tiene:

$N = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12\}$

$M = \{0; 4; 8; 12\}$

Luego:

A) $N = \{2x / x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 6\}$

$M = \{4x / x \in \mathbb{N} \wedge x < 4\}$

B) $n(N) - n(M) = 7 - 4 = 3$

C) $0 + 4 + 8 + 12 = 24$

D) $2^7 - 1 = 127$

3. $A = \{0; 1; 8; 27; 64\}$; $B = \{27; \varnothing\}$

A) $A = \{x^3 / x \in \mathbb{N} \wedge x < 5\}$

B) $n(A \cup B) =$ 6

C) $n(B) =$ 2

D) $B - A = \{\varnothing\}$

Razonamiento y demostración

4. $A = \{a; e; i; o; u\} \Rightarrow 2^5 - 1 = 31$

$B = \{y; u; v; i; t; h; z; a\} \Rightarrow 2^8 - 1 = 255$

$C = \{f; i; s; c; a\} = 2^5 - 1 = 31$

Clave C

5. $A = \{7; \{7\}; \{\{7\}\}; \{\{\{7\}\}\}\}$

$n(A) = 1$ — F

$n(A) = 4$ — V

$\varnothing \subset A$ — V

$\{\{\{\{7\}\}\}\} \subset A$ — V

$\varnothing \in A$ — F

$\{7; \{7\}\} \subset A$ — V

$\therefore$ Hay dos proposiciones falsas.

Clave A

Resolución de problemas

6. Sea: $n(A) = a$, si $n(A) - 2 = a - 2$

$\Rightarrow 2^a = 24 + 2^{a-2} \Rightarrow 2^a = 32$

$a = 5$

n.° conjuntos binarios

$C_2^{n(A)} = \frac{5!}{2!\,.\,3!} = \frac{5\,.\,4}{2} = 10$

Clave A

7. Sea B el conjunto unitario:

$B = \{a + 2b; 3b - a + 2; 11\}$

Donde los elementos de B son iguales.

$$\begin{array}{r} a + 2b = 11 \\ 3b - a + 2 = 11 \\ \hline 5b = 20 \\ b = 4 \\ \Rightarrow a = 3 \end{array} \quad (+)$$

Nos piden: a . b

$\therefore a\,.\,b = 3\,.\,4 = 12$

Clave A

8. n.° subconjuntos propios de $A = 2^{n(A)} - 1$

Donde: n número de elementos del conjunto A.

En el problema:

Para A:

n.° subconjuntos propios de A:

$2^4 - 1 = 15$

Para B:

n.° subconjuntos propios de B:

$2^5 - 1 = 31$

Para C:

$C = \{x / x \in \mathbb{Z};\ 2 \leq x \leq 6\}$

$C = \{2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow n(C) = 5$

n.° subconjuntos propios de C:

$2^5 - 1 = 31$

Para D:

$D = \{x^2 / x \in \mathbb{Z};\ -3 \leq x \leq 1\}$

$\Rightarrow x = \{-3; -2; -1; 0; 1\}$

$D = \{9; 4; 1; 0\} \Rightarrow n(D) = 4$

n.° subconjuntos propios de D:

$2^4 - 1 = 15$

Para E:

$E = \{x/x \in \mathbb{Z};\ 5 < x < 10\}$

$E = \{6; 7; 8; 9\} \Rightarrow n(E) = 4$

n.° subconjuntos propios de E:

$2^4 - 1 = 15$

$\therefore$ Solo A, D y E.

Clave D

9. Del enunciado:

$\underbrace{n(A)}_{x};\ \underbrace{n(B)}_{x+1};\ \underbrace{n(C)}_{x+2}$

$n[P(A)] + n[P(B)] + n[P(C)] = 448$

$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 448$

$\underbrace{2^x + 2\,.\,2^x + 2^2\,.\,2^x}_{7\,.\,2^x = 448} = 448$

$2^x = 64 = 2^6 \Rightarrow x = 6$

El número máximo:

$n[P(A \cup B \cup C)] = 2^{n(A \cup B \cup C)}$

$n_{máx.}[P(A \cup B \cup C)] = 2^{n(A \cup B \cup C)máx.}$ ...(1)

El cardinal de la unión de conjuntos es máximo si los conjuntos son disjuntos en este caso.

$n_{máx.}(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$

$= 6 + 7 + 8 = 21$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1):

$n_{máx.}[P(A \cup B \cup C)] = 2^{21} = 2^{3\,.\,7}$

$= (2^3)^7 = 8^7$

Clave C

10. Dato: $A \subset B \subset C$

$n(B) = n(A) + 5$

$n(C) = 2n(B)$

$n(A) + n(B) + n(C) = 27$

Sean:

$n(A) = a$

$n(B) = b$

$n(C) = c$

$\Rightarrow b = a + 5$

$a = b - 5$

$\Rightarrow c = 2b$

Reemplazando:

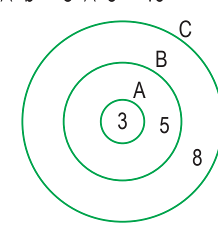
$a + b + c = 27$

$4b - 5 = 27$

$b = 32$

$b = 8$

$\Rightarrow a = 3 \wedge b = 8 \wedge c = 16$



Del gráfico:

$n(C - B) = 8$

$n[P(C - B)] = 2^8$

$\therefore n[P(C - B)] = 256$

Clave C

Nivel 2 (página 14) Unidad 1

Comunicación matemática

11. Se tiene:

$B = \{\varnothing; \{\ \}; 1; 1; R; \{\varnothing\}\}$

$B = \{\varnothing; 1; R; \{\varnothing\}\}$

Luego:

I. F

II. V

III. V

IV. F

12. Se tiene: $A = \{2; 3; 6; 11; 18\}$

A) $A = \{x^2 + 2 / x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 4\}$

B) $2 + 3 + 6 + 11 + 18 = 40$

C) $\{2; 3\}$

D) $n(A) = 5$

Razonamiento y demostración

13. En A: $x^2 < 16 \Leftrightarrow -4 < x < 4$

$A = \{-3; -2; -1; 0, 1; 2; 3\}$

En B:

$-1 < \frac{2x+1}{5} < 1$

$-5 < 2x + 1 < 5$

$-6 < 2x < 4$

$-3 < x < 2$

$B = \{-2; -1; 0; 1\}$

Luego:

I. V   III. F

II. F   IV. V

14. Por dato, A es unitario:

$a - b = 1$ ... (1)

Además como $B = \varnothing$ se cumple:

$A \cup B = A \cup \varnothing = A = \{a + b, 3\}$

Entonces: $a + b = 3$ ... (2)

De (1) y (2): $a = 2 \wedge b = 1$

Luego:

I. V   III. V

II. V   VI. F

Resolución de problemas

15. Por dato:

$2^{n(A \cup B)} = 28 + 2^{n(A \cap B)}$

$2^{n(A \cup B)} = 28 + 2^2$

$2^{n(A \cup B)} = 32 + 2^5$

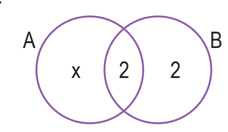
$\Rightarrow n(A \cup B) = 5$

Además:

$2^{n(A - B)} - 1 = 3$

$2^{n(A - B)} = 2^2 \Rightarrow n(B - A) = 2$

Tenemos:



$x + 2 + 2 = 5 \Rightarrow x = 1$

$\therefore n(A) = 1 + 2 = 3$

Clave A

16. $n[P(A \cup B)] = 2048 = 2^{11}$

$2^{n(A \cup B)} = 2^{11} \Rightarrow n(A \cup B) = 11$

$n[P(A \cap B)] = 16 = 2^4$

$2^{n(A \cap B)} = 2^4 \Rightarrow n(A \cap B) = 4$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$11 = n(A) + n(B) - 4$

$\Rightarrow n(A) + n(B) = 15$ ... (I)

Del dato:

$n(A) - n(B) = 3$ ...(II)

Sumando (I) y (II):

$2n(A) = 18$

$n(A) = 9 \Rightarrow n(B) = 6$

$n(U) = n(B) + n(B') = 6 + 9 = 15$

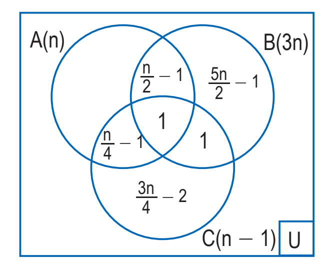
$n(U) = n(A) + n(A')$

$15 = 9 + n(A') \Rightarrow n(A') = 6$

$\therefore n[P(A')] = 2^6 = 64$

Clave B

17. Del enunciado:



Además: $\frac{5n}{2} - 1 = 49$

$5n - 2 = 98 \Rightarrow n = 20$

Piden:

$n\{[(A \cap C) \cap B^C] \cup [(A^C \cap B^C)]\} = \frac{n}{4} - 1 + \frac{3n}{4} - 2$

$n\{[(A \cap C) \cap B^C] \cup [(A^C \cap B^C)]\} = n - 3 = 20 - 3$

$n\{[(A \cap C) \cap B^C] \cup [(A^C \cap B^C)]\} = 17$

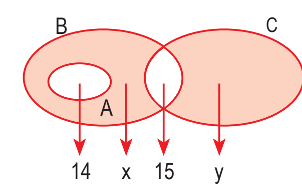
Clave A

18. $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$

$A - C = A \Rightarrow A \cap C = \varnothing$

$4 \,.\, 2^{n(A)} = 2 \,.\, 2^{n(B \cap C)} = 2^{16}$

$\Rightarrow n(A) = 14 \;\wedge\; n(B \cap C) = 15$



Como: $A \cup B \cup C = U$

$14 + x + 15 + y = 100$

$x + y + 29 = 100$

$x + y = 71$

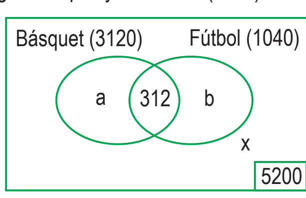
Piden: $n[(B - A) \,\Delta\, C] = x + y = 71$

Clave C

19. Practican básquet 60%(5200) = 3120

Practican fútbol 20%(5200) = 1040

Juegan básquet y fútbol 10%(3120) = 312



$a + 312 = 3120 \Rightarrow a = 2808$

$b + 312 = 1040 \Rightarrow b = 728$

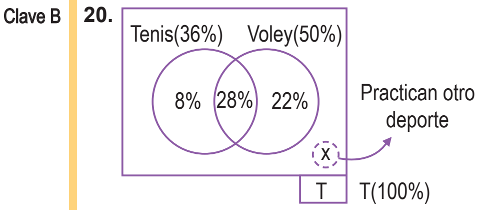
$a + 312 + b + x = 5200$

$3848 + x = 5200$

$\therefore x = 1352$

Clave B

20.



El porcentaje de personas que practican un solo deporte será: (8% + 22%)T = 30%T

Por dato:

30%T = 45

T = 150

$\Rightarrow$ 8% + 28% + 22% + x = 100%

x = 42%

Los que practican otros deportes representan el 42% del total.

$\Rightarrow$ 42%(150) = 63

Clave B

Nivel 3 (página 15) Unidad 1

Comunicación matemática

21. Se tiene:

$M = \{\varnothing; \{\varnothing\}; R; 1\}$

$N = \{\varnothing; a; \{b\}; 1\}$

I. V   II. F

III. V   IV. V

22. Se tiene:

$C = \{4x - 1 \,/\, x \in \mathbb{N} \wedge 1 \le x \le 7\}$

$C = \{3; 7; 11; 15; 19; 23; 27\}$

Luego:

I. $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$

II. $B = \{20; 24; 28\}$

$\Rightarrow B \cap C = \varnothing$

III. $n(B \cap C) = 0$

Razonamiento y demostración

23. $P(A) = \{\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}\}$

$P(B) = \{\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}\}$

Luego:

T = 0

S = 1 ({3})

I. S = T   F

II. S > T   V

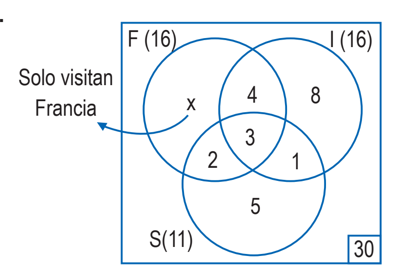
III. S + T = 1   V

IV. $S = T^2 + 1$ V

24. FVFF

Resolución de problemas

25.



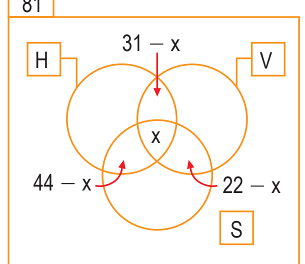
$\Rightarrow 16 = 4 + 3 + 2 + x$

$16 = 9 + x$

$\therefore\ x = 7$

Clave E

26.



Dato: 81 personas leen 2 revistas por lo menos.

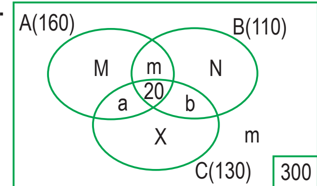
Luego:

$(44 - x) + x + (31 - x) + (22 - x) = 81$

$\therefore\ x = 8$

Clave A

27.



Del enunciado:

$m = \dfrac{n(A)}{2} \Rightarrow n(A) = 2m$

$M + m + 20 + a = 2m$

$M + 20 + a = m$ ...(1)

$n(A) = M + m + a + 20 = 160$

$\Rightarrow M + m + a = 140$ ...(2)

$n(B) = N + m + b + 20 = 110$

$\Rightarrow N + m + b = 90$ ...(3)

$n(C) = X + a + b + 20 = 130$

$\Rightarrow X + a + b = 110$ ...(4)

Reemplazando (1) en (2):

$M + a + m = 140$

$M + a + (M + 20 + a) = 140$

$\Rightarrow M + a = 60$ ...(5)

Reemplazando (5) en (1): $m = 80$

Como:

$M + N + X + a + b + m + 20 + m = 300$

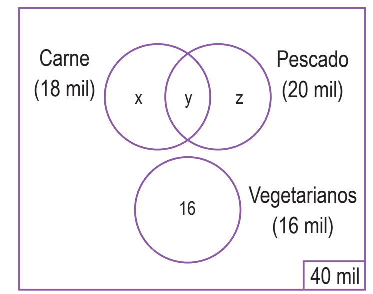
$\underbrace{M + a}_{60} + X + \underbrace{N + b + m}_{90} + \underbrace{m}_{80} = 280$

$X + 230 = 280$

$\therefore X = 50$

Clave D

28. Del enunciado:



Luego:

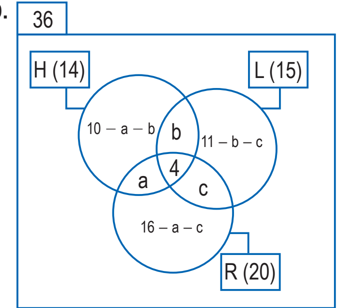
$x + \underbrace{y + z}_{20\,000} + 16\,000 = 40\,000$

$x + 36\,000 = 40\,000$

$\therefore x = 4000$

Clave B

29.



Del gráfico, los que enseñan por lo menos dos cursos: $a + b + c$

Por dato:

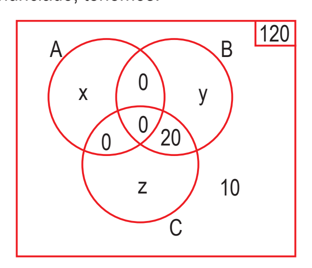
$14 + 11 - b + 16 - a - c = 36$

$41 - a - b - c = 36$

$a + b + c = 5$

Clave D

30. Del enunciado, tenemos:



$\Rightarrow x + y + z + 20 + 10 = 120$

$\therefore x + y + z = 90$

Clave B

Nivel 1 (página 18) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4. I. Sabemos que:

$4 \leq \overline{ab}_{(4)} < 4^2$

Luego, desarrollando obtenemos:

$21_{(4)} \geq \overline{ab}_{(4)} + 11_{(4)}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$9 \geq \overline{ab}_{(4)} + 5$

$4 \geq \overline{ab}_{(4)}$ (falso) F

II. $\overline{1(2b)(b^2)}_{(a)} = 1 \times a^2 + 2ba + b^2 \ (a > 2)$

$= (a + b)^2$

$= 100_{(a+b)} \qquad (a + b > 2)$ V

III. $\overline{pqp}_{(2)} = \overline{p(q+2)}_{(3)}$

$\Rightarrow 0 < p < 2 \ ; \ q + 2 < 3$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$1 \qquad 0$

Luego: $p^q = 1^0 = 1$ F

5. $\sqrt[3]{\overline{10p}_{(q)} \times \overline{aa} + 4} = 5$

$\overline{10p}_{(q)} \times \overline{aa} + 4 = 125$

$\overline{10p}_{(q)} \times \overline{aa} = 121$

$\overline{10p}_{(q)} \times \overline{aa} = 11 \times 11$

$\Rightarrow \overline{10p}_{(q)} = \overline{aa} = 11$

Donde: a = 1

Además: $\overline{10p}_{(q)} = 11$

$q^2 + p = 11$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$2^2 \quad 7$ ✗

$3^2 \quad 2$ ✓

Luego:

I. F II. V III. V

Clave D

Resolución de problemas

6. $\overline{1n5}_{(6)} = 131_{(5)}$

A base 10:

$1 \cdot 6^2 + n \cdot 6 + 5 = 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1$

$36 + 6n + 5 = 25 + 15 + 1$

$6n + 41 = 41$

$\therefore n = 0$

Clave A

7. $1331_{(n)} = 260_{(9)}$

$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 2 \cdot 9^2 + 6 \cdot 9 + 0$

$(n + 1)^3 = 216 = 6^3$

$(n + 1)^3 = 6^3$

$\Rightarrow n = 5$

Piden:

Convertir $43_{(5)}$ a base 10:

$\therefore 43_{(5)} = 4(5) + 3 = 23$

Clave B

8. $63_{(x)} - 27_{(x)} = 35_{(x)}$

$6x + 3 - (2x + 7) = 3x + 5$

$6x + 3 - 2x - 7 = 3x + 5$

$4x - 4 = 3x + 5$

$\therefore x = 9$

Clave D

9. $\overline{a3} = \overline{110a}_{(2)}$

$10a + 3 = 2^3(1) + 2^2(1) + 2(0) + a$

$10a + 3 = 8 + 4 + a$

$9a = 9 \Rightarrow a = 1$

Piden: $M = 2a^2 + 3a + 1 = 2(1)^2 + 3(1) + 1$

$M = 2 + 3 + 1 = 6$

Clave C

10. $242_{(7)} = 2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 2$

$242_{(7)} = 98 + 28 + 2$

$242_{(7)} = 128$

Por divisiones sucesivas:

128 | 12
(8) (10)

$242_{(7)} = (10)8_{(12)}$

Por lo tanto:

Σ cifras = 10 + 8 = 18

Clave B

Nivel 2 (página 18) Unidad 1

Comunicación matemática

11.

12.

13.

Razonamiento y demostración

14. I. $\sqrt{\overline{a(2a)}_{(n)}} = 4$

$\overline{a(2a)a}_{(n)} = 16$

$an^2 + 2an + a = 16$

$a(n + 1)^2 = 4^2 \qquad (n \geq 2)$

$\downarrow \ \downarrow$

$1 \ 3$

$\therefore a + n = 1 + 3 = 4$ V

II. Si los numerales están bien escritos, entonces:

- $\overline{ab}_{(n)} < \overline{ab}_{(n)} + c = \overline{a(b+c)}_{(n)}$
- $\overline{ab}_{(n)} < n^2$

$\overline{ab}_{(n)} + c < n^2 + c$

$\overline{a(b+c)}_{(n)} < \overline{10c}_{(n)}$

Luego:

$\overline{ab}_{(n)} < \overline{a(b+c)}_{(n)} < \overline{10c}_{(n)}$ V

III. $\overline{aa0}_{(2)} = \overline{(b-4)(b-4)}_{(b)}$

$\downarrow\downarrow$

11

$110_{(2)} = \overline{(b-4)(b-4)}_{(b)}$

$6 = \overline{(b-4)(b-4)}_{(b)}$

b: 5; 6

Si b = 6:

$6 = 6 \times 1 = 10_{(6)}$ (no cumple)

Si b = 5:

$6 = 1 \times 5 + 1 = 11_{(5)}$ F

15. I. $m \times \overline{abc} - \overline{abc0} = c$

$m \times \overline{abc} - \overline{abc} \times 10 = c$

$\overline{abc} \times (m - 10) = c$

$\downarrow \qquad \uparrow$

10 $\quad$ 1 cifra; debe ser 0 V

II. $\overline{mm0}_{(2)} = 9 - \overline{m0m}_{(2)}$

$0 < m < 2$

$\downarrow$

1

$110_{(2)} = 9 - 101_{(2)}$

$6 = 9 - 5$

$6 = 4$ (falso) F

III. $\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}}} = \overline{1c}_{\overline{1b}_{\overline{1a}}}$

$10 + a + b + c = 10 + a + b + c$ V

Resolución de problemas

16. $\overline{abcd}_{(4)} = 123$

123 | 4
120 30 | 4
(3) 28 7 | 4
(2) 4 (1)
(3)

$\Rightarrow 123 = 1323_{(4)}$

$\overline{abcd}_{(4)} = 1323_{(4)}$

$\Rightarrow a = 1; b = 3; c = 2; d = 3$

Piden:

$a + b + c + d = 1 + 3 + 2 + 3 = 9$

Clave C

17. $\Rightarrow 310_{(4)} = 124_{(n)}$

Llevamos a base 10:

$3 . 4^2 + 1 . 4 + 0 = 1 . n^2 + 2n + 4$

$48 + 4 = n^2 + 2n + 4$

$48 = n^2 + 2n$

$6 . 8 = n(n + 2)$

$\Rightarrow n = 6$

Clave E

18. $\overline{a11}_{(7)} = \overline{37a}_{(8)}$

Descomponiendo:

$a . 7^2 + 1 . 7 + 1 = 3 . 8^2 + 7 . 8 + a$

$49a + 8 = 192 + 56 + a$

$48a = 240$

$a = 5$

Clave D

19. $\overline{abcd} = 41 \times \overline{ab} + 70 \times \overline{cd}$

$100\overline{ab} + \overline{cd} = 41(\overline{ab}) + 70(\overline{cd})$

$59\overline{ab} = 69\overline{cd}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$69 \quad 59$

$\Rightarrow a = 6;\ b = 9;\ c = 5;\ d = 9$

$\therefore a + b + c + d = 29$

Clave D

20. $\overline{(x-2)(x-1)3}_{(8)} = 83$

$(x - 2)8^2 + (x - 1)8 + 3 = 83$

$64x - 128 + 8x - 8 = 80$

$72x - 136 = 80$

$72x = 216$

$x = 3$

$3 \,|\underline{\,2\,}$ $\Rightarrow 3 = 11_{(2)}$

① ①

Clave A

21. $M = 4 . 11^3 + 7 . 11^2 + 89$

$M = 4 . 11^3 + 7 . 11^2 + 8 . 11 + 1$

Sabemos:

$an^3 + bn^2 + cn + d = \overline{abcd}_{(n)}$

Reemplazando: $M = 4781_{(11)}$

Por lo tanto:

Suma de cifras: $4 + 7 + 8 + 1 = 20$

Clave B

22. Sea:

$\overline{x4}_{(5)} + 12_{(x)} = 132_{(x)}$

$5.x + 4 + x + 2 = x^2 + 3x + 2$

$6x + 6 = x^2 + 3x + 2$

$0 = x^2 - 3x - 4$

$x \quad -4$

$x \quad +1$

$\Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0$

$x = 4 \vee x = -1$

Clave B

Nivel 3 (página 19) Unidad 1

Comunicación matemática

23.

$101_{(2)} = 5$

$12_{(11)} = 13$

x

$x^2 = 13^2 - 5^2$

$x = 12$

Luego: Área $= 5 \times 12 = 60$

Clave D

24.

Razonamiento y demostración

25. I. $\overline{abb} - \overline{xy}_{(3)} = 117$

$\overline{abb} = 117 + \overline{xy}_{(3)}$

$3 \leq \overline{xy}_{(3)} < 9$

$120 \leq 117 + \overline{xy}_{(3)} < 126$

$120 \leq \overline{abb} < 126$

$\downarrow$

1

Luego; a siempre va a ser igual a 1. V

II. Como $\overline{c(c^2)}_{(n)} = 42$; entonces $n > c^2$ y el numeral $\overline{ab(c^2)}_{(n)}$ está bien escrito.

$n^2 \leq \overline{ab(c^2)}_{(n)} < n^3$

$\Rightarrow n^2 \leq \overline{ab0}_{(n)} + c^2$

$n^2 - c^2 \leq \overline{ab}_{(n)} \times n$

$\dfrac{n^2 - c^2}{n} \leq \overline{ab}_{(n)}$ V

III. $\overline{mn}_{(3)}{}^{\overline{1n}_{(m)}} = (3m + n)^{m+n} = 7^3$

$\downarrow \quad \downarrow$

$2 \quad 1$

Luego: $\sqrt{m^{n+1}} = \sqrt{2^{1+1}} = 2$ F

26. $\overline{\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m+n}{m-1}\right)(2m+1)}_{(6)} = \overline{5(ab)}_{(\overline{cc})}$

$m \neq 0;\ 1$
$m < 3$ $\Big\}$ $m = 2$

Reemplazamos m:

$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)(2+n)5}_{(6)} = \overline{5(ab)}_{(\overline{cc})}$

$\Rightarrow$ n es par $\wedge\ 2 + n < 6 \wedge n > 0 \Rightarrow n = 2$

$\Rightarrow 145_{(6)} = \overline{5(ab)}_{(\overline{cc})}$

$65 = 5 \times \overline{cc} + \overline{ab}$

$\downarrow \quad \downarrow\downarrow$

$1 \quad 1\ 0$

Luego:

I. $\overline{(ab)(ab)}_{(\overline{cc})} = (10)(10)_{(11)} = 11^2 - 1$ F

II. $\sqrt{\overline{ab} + \overline{n3}_{(6)}} = \sqrt{10 + 23_{(6)}}$

$= \sqrt{10 + 12 + 3}$

$= 5$

$= 10_{(5)}$ F

III. $\overline{ac} \times \overline{mn} = \overline{m(m+n)n}$

$11 \times 22 = 242$ V

Resolución de problemas

27. $\overline{ababa}_{(4)} = 477 = 13131_{(4)}$

Tenemos:

$477 \,|\underline{\,4\,}$

$476 \quad 119 \,|\underline{\,4\,}$

① $\quad 116 \quad 29 \,|\underline{\,4\,}$

③ $\quad 28 \quad 7 \,|\underline{\,4\,}$

① $\quad 4 \quad$ ①

③

Luego: $31_{(5)} + 13_{(4)} = 5 \times 3 + 1 + 1 \times 4 + 3$

$= 16 + 7$

$= 23$

Clave E

28. $N = 15 + 5 \times 6^2 + 3 \times 6^4 + 11 \times 6^3$

$N = 2 \times 6 + 3 + 5 \times 6^2 + 3 \times 6^4 + 5 \times 6^3 + 6^4$

$N = 4 \times 6^4 + 5 \times 6^3 + 5 \times 6^2 + 2 \times 6 + 3$

$N = 45523_{(6)}$

$\therefore 4 + 5 + 5 + 2 + 3 = 19$

Clave D

29. Piden: N en base 8, si:

$N = 123_{(5)} + 231_{(5)} + 312_{(5)}$

Llevamos a base 10:

$N = 1 . 5^2 + 2 . 5 + 3 + 2 . 5^2 + 3 . 5 + 1 + 3 . 5^2 + 1 . 5 + 2$

$N = 25 + 10 + 3 + 50 + 15 + 1 + 75 + 5 + 2$

$N = 186$

Luego por divisiones sucesivas a base 8:

$186 \,|\underline{\,8\,}$

② $\quad 23 \,|\underline{\,8\,}$

⑦ $\quad$ ②

$186 = 272_{(8)} \Rightarrow N = 272_{(8)}$

Clave C

30. Del enunciado:

$1a$
$1a$
$1a$
$\ddots$
$1a_{(a+1)}$ $= 57$

a veces

Por propiedad:

$(a+1)+a(a)=57$

$a^2+a-56=0$

a ╳ +8 ⇒ a = −8

a ╳ −7 ⇒ a = 7

Como a es una cifra ⇒ a > 0

$\therefore a=7$

Clave B

31. $\overline{(n-1)(n-1)(n-1)(n-1)}_{(n)}=1295$

Sabemos:

$\underbrace{\overline{(a-1)(a-1)\ldots(a-1)}_{(a)}}_{k\text{ cifras}}=a^k-1$

Reemplazando:

$n^4-1=1295$

$n^4=1296$

$n=\sqrt[4]{1296}$

$n=6$

Clave B

32. Si:

$\overline{aa}$, $\overline{1a}$, $\overline{1a}$, $\overline{1a}$, …, $\overline{1a}$ (a cifras) $=371$

$\Rightarrow \overline{aa}_{(10+a(a-1))}=371$

$\Rightarrow 10a+a^2(a-1)+a=371$

$11a+a^2(a-1)=371$

$a(11+a(a-1))=7\times 53$

$11+a(a-1)=53$

$a=7$

Clave A

33. cifras 3.^er^ orden = cifra 4.° lugar

⇒ 9 876 543

⇒ 9 + 3 = 12

Clave D

34. $\overline{x6}_{(7)}+\overline{xx}_{(5)}=\overline{3x}_{(6)}$

$7x+6+5x+x=18+x$

$13x+6=18+x$

$12x=12$

$x=1$

Luego: $\overline{xxx}_{(2x)}=111_{(2)}$

$111_{(2)}=1\times(2)^2+1\times(2)+1$

$=4+2+1$

$=7$

Clave D

35. $\overline{(5p)(p+1)}-\dfrac{(\overline{mn}+1)^3}{3}\in\mathbb{Z}^+$,

(5p ↓ 1)

entonces: $\dfrac{(\overline{mn}+1)^3}{3}\in\mathbb{Z}^+$

Es decir:

$\dfrac{(\overline{mn}+1)^3}{3}\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow(\overline{mn}+1)^3=3k,\ k\in\mathbb{Z}^+$

Como $(\overline{mn}+1)^3=3k$ es un cubo perfecto, entonces:

$3k=3^3\times q^3,\ q\in\mathbb{Z}^+$

Luego: $52-\dfrac{3^3\times q^3}{3}=52-9q^3$

Si $q=2$: $52-9\times 8=-20\notin\mathbb{Z}^+\Rightarrow q=1$

Luego:

$13_{(a)}+16_{(c)}+35_{(b)}=52-9$

$a+3+c+6+3b+5=43$

$a+c+3b=29$

Se tiene: $a>3$; $c>6$; $b>5$

Luego: $a\geq 4$; $c\geq 7$; $b\geq 6$

Entonces:

$a+c+3b\geq 4+7+3\times 6$

$a+c+3b\geq 29$

Por lo tanto: $a=4$; $c=7$; $b=6$

Piden: $a^2+c^2+b^2=101$

Clave D

36. Del enunciado, a, b y c son cifras diferentes entre sí, además: $a>0$; $b>0$; $0<c<3$

También:

$\overline{2a}_{\overline{ab}_{\overline{ac}_{(3)}}}=\overline{1m}_{(9)}\leq 18_{(9)}$

$6a^2+2ac+2b+a=9+m\leq 17$

Si $a=2$: $24+4c+2b+2>17$ (no cumple)

Entonces: $a=1$

Luego: $6+2c+2b+1=9+m$

$2c+2b=2+m$

$c+b=1+m/2$

Como piden $(a^2+b^2+c^2)_{\text{máx.}}$, entonces $m=8$, luego:

$c+b=5$

Además: $1<c<3\Rightarrow c=2\wedge b=3$

Piden: $a^2+b^2+c^2=1^2+3^2+2^2=14$

Clave B

Nivel 1 (página 23) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

2. $\overline{ab4}$ +
$\overline{1a2}$
$\overline{c4a}$
$\overline{ba9}$

$4 + 2 + a = 9$
$a = 3$
$b + 3 + 4 = ...3$
$b = 6$
$3 + 1 + c = 6$
$c = 2$

Luego:
I. $36 + 62 + 32 = 130$
II. $66 + 3^2 = 75$
III. $66 - 33 - 22 = 11$

3.

Razonamiento y demostración

4. $\overline{ba} + a = \overline{ab}$
$a = \overline{ab} - \overline{ba}$

Por propiedad: $a = 9$
$\Rightarrow 9 = \overline{9b} - \overline{b9}$
$9 = 90 + b - 10b - 9$
$b = 8$

Luego:
I. V II. F III. V

5. $\overline{bc}$; 36, 46; ...; $\overline{abc}$
10 10
$\Rightarrow \overline{bc} = 36 - 10 = 26$

Por dato:
$$31 = \frac{\overline{abc} - \overline{bc}}{10} + 1$$
$$31 = \frac{\overline{a00}}{10} + 1$$
$30 = \overline{a0} \Rightarrow a = 3$

Luego:
I. $t_c = \dfrac{26 + 326}{2} = 176$ V
II. $t_n = 26 + 10(n - 1) = 16 + 10n$ V
III. $a + b = 3 + 2 = 5 \neq 6$ F

Resolución de problemas

6. Si: $\overline{a8b} + \overline{bb9} + \overline{cc3} = 2428$

$\overline{a\,8\,b}$ +
$\overline{b\,b\,9}$
$\overline{c\,c\,3}$
2 4 2 8

- $b + 9 + 3 = 18$
  $b = 6$
- $9 + b + c = ...2$
  $c = 7$
- $a + b + c + 2 = 24$
  $a = 9$

$\therefore a + b + c = 6 + 9 + 7 = 22$

Clave A

7. Si: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{mn(m+1)}$

$100a + 10b + c - 100c - 10b - a = \overline{mn(m+1)}$
$99a - 99c = \overline{mn(m+1)}$
$99(a - c) = \overline{mn(m+1)}$
$a - c = 5$

$\therefore m + n + a - c = 4 + 9 + 5 = 18$

Clave C

8. Si: $\overline{ab3} - \overline{25a} = \overline{5a5}$

$\overline{ab3}$ –
$\overline{25a}$
$\overline{5a5}$

$\Rightarrow a = 8$
$b = 4$

$\therefore a - b = 4$

Clave B

9. 14; 20; 26; 32; ...; 278
6 6 6

$t_n = 278$
$t_1 = 14$
$r = 6$
$$n = \frac{t_n - t_1}{r} + 1 = \frac{278 - 14}{6} + 1$$
$\Rightarrow n = 44 + 1 = 45$
$\therefore n = 45$

Clave D

10. $\overline{abc}$ ×
3
...721

$\Rightarrow$ $a = 9$
$b = 0$
$c = 7$

$\therefore 9 + 7 + 0 = 16$

Clave B

Nivel 2 (página 23) Unidad 1

Comunicación matemática

11. $\overline{aaa}$ + $\overline{aaa}$ = 1554 $\overline{1bbb}$ – $\overline{aaa}$ = 1222 $\overline{cc}$ + 55 = $\overline{bb}$

$2a = ...4$ $b - 7 = 2$ $c + 5 = 9$
$a = 2 \vee 7$ $b = 9$ $c = 4$

I. $\overline{abc} - \overline{cab} = 794 - 479 = 315$
II. $\overline{bc} - \overline{cb} = 94 - 49 = 45$
III. $\overline{1a} + \overline{1b} + \overline{1c} = 17 + 19 + 14 = 50$

12.

Razonamiento y demostración

13. I. C. A. $(10^n) = 10^{n+1} - 10^n = 10^n(10 - 1)$
$= 9 \times 10^n; \forall n \in \mathbb{N}$
↓
tiene (n + 1) cifras V

II. Para N = 92
C. A. (C. A. (92)) = C. A.(100 – 92)
= C. A . (8)
= 2 F

III. Para N = 98 y M = 8, se tiene:
C. A. (98) = C. A. (8) $\Rightarrow 98 \neq 8$ F
(2) (2)

Clave A

14. $D = dq + r, 0 < r < d$
$D = d(q + 1) + r'$
$\Rightarrow dq + r = d(q + 1) + r'$
$r = d + r'$
$r - d = r'$

Como: $r < d$
$r - d < 0$
$r' < 0$

I. F II. F III. V

Resolución de problemas

15. $N = 17 \times 9 + 16$
$N = 169$

Clave C

16. Si: $\overline{x1} + \overline{x2} + ... + \overline{x9} = \overline{6bc}$

x 1 +
x 2
⋮ ⋮
x 9
} 9 numerales
6 b c

En las unidades:
$$...c = \frac{9 \times 10}{2} = 45 \Rightarrow c = 5$$

Luego: $\overline{6b} = 4 + 9x$
$x = 7$
$b = 7 \Rightarrow x + b + c = 19$

Clave D

17. $M + S + D = 15\,684$
Sabemos que:
$M - S = D$

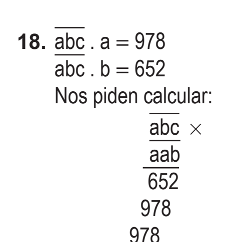
Reemplazando obtenemos:
$2M = 15\,684$
$M = 7842$

Ademas:
$S - D = 4788$
$M - D - D = 4788$
$7842 - 2D = 4788$
$3054 = 2D$
$1527 = D$

Piden: $1 + 5 + 2 + 7 = 15$

Clave C

18. $\overline{abc} \cdot a = 978$
$abc \cdot b = 652$
Nos piden calcular:



$$\begin{array}{r} \overline{abc} \times \\ \overline{aab} \\ \hline 652 \\ 978 \\ 978 \\ \hline 108232 \end{array}$$

$\therefore \overline{abc} \times \overline{aab} = 108\ 232$

Clave A

19. Del enunciado:

$$\begin{array}{l|l} D & 3d \\ \hline d & q \Rightarrow 24 \end{array}$$

Por dato:
$D + 3d + 24 + d = 4644$ ... (1)

Sabemos:
$D = (3d)24 + d = 73d$ ... (2)

En (1) reemplazo (2):
$73d + 3d + 24 + d = 4644$
$77d + 24 = 4644$
$d = 60$

Clave E

20.

$$\begin{array}{r} N \times \\ 3\,4\,7 \\ \hline 7\,(N) \\ 4\,(N) \\ 3(N) \\ \hline \end{array}$$

← Mayor producto P.

Por dato: $\Rightarrow 7(N) - 4(N) = 3501$
$3(N) = 3501$
$N = 1167$

Suma de cifras $= 1 + 1 + 6 + 7 = 15$

Clave D

21. Ordenamos verticalmente los sumandos:

▪
$$\left.\begin{array}{r} 4\ + \\ 44 \\ 444 \\ \vdots \\ 444...444 \end{array}\right\} \text{35 sumandos}$$
$$\overline{...cba}$$

$\underbrace{4 + 4 + ... + 4}_{\text{35 veces}} = \overline{...a}$

$4(35) = \overline{...a}$
$140 = \overline{...a}$
$\Rightarrow a = 0$, llevo 14

$14 + \underbrace{(4 + 4 + ... + 4)}_{\text{34 veces}} = \overline{...b}$

$14 + 4(34) = \overline{...b}$
$150 = \overline{...b}$
$\Rightarrow b = 0$, llevo 15

$15 + 4(33) = \overline{...c}$
$147 = \overline{...c}$
$\Rightarrow c = 7$
$\therefore \sum \text{cifras} = a + b + c = 7$

Clave C

Nivel 3 (página 24) Unidad 1

Comunicación matemática

22.

23. $a = 86 \times 2 - 11 = 161$
$b = 196 \times 3 - 111 = 477$

I. 362 II. 77 435 III. 1362

Razonamiento y demostración

24. $\overline{3m8} \times \overline{pq} = 2500_{(\overline{pq})}$
$\overline{3m8} \times \overline{pq} = 25_{(\overline{pq})} \times \overline{pq}^2$
$\overline{3m8} = 25_{(\overline{pq})} \times \overline{pq}$
$\overline{3m8} = (2\overline{pq} + 5) \times \overline{pq}$

Si $p = 2$, entonces:
$[(2 \times \overline{2q} + 5) \times \overline{2q}]_{min.} = 900$

Entonces: $p = 1$
$\overline{3m8} = \underbrace{(2\overline{1q} + 5)}_{\text{impar}} \times \underbrace{\overline{1q}}_{\text{par } (q \neq 0)}$

Luego:
$q = 2$: $(2 \times 12 + 5) \times 12 = 348 \Rightarrow m = 4$ ✓
$q = 4$: $(2 \times 14 + 5) \times 14 = 462$ ✗

Por lo tanto:
I. F II. V III. V

25. I. $C.A.[C.A.(\overline{9mn})] = C.A.[1000 - \overline{9mn}]$
$= C.A.\ [\overline{(9 - m)(9 - n)}]$
$= 100 - \overline{(9 - m)(9 - n)} = \overline{mn}$ V

II. $\overline{m3} \times \overline{pq} = \overline{ab3}$
└→ 1 V

III. $\overline{ab} \times a - \overline{pq} = 19$ (+)
$\overline{ab} \times b + \overline{pq} = 96$
$\overline{ab} \times a + \overline{ab} \times b = 115$

Luego:
$\overline{ab} \cdot (a + b) = 23 \times 5$

$\therefore \overline{ab}^2 = 23^2 = 529$ F

Resolución de problemas

26.
$$\begin{array}{l|l} M & 64 \\ \hline 3q & q \end{array}$$

$M = 64(q) + 3q$

Luego, se cumple:
$3q <$ divisor
$q < 21{,}3$
└→ 21 números

$\therefore$ Hay 21 enteros positivos.

Clave D

27. De: $8 + 88 + 888... + \underbrace{88\ ...88}_{\text{37 cifras}}$

$$\left.\begin{array}{r} 8\ + \\ 8\ 8 \\ 8 \quad 8\ 8 \\ \vdots\ \vdots \\ 8\ 8\ \ 8...\ 8\ 8 \end{array}\right\} \text{37 cifras}$$
$$\overline{a...\ b\ c}$$

Luego, analizamos cada columna:
$...c = 8 \cdot 37 = 296 \Rightarrow c = 6$
$...b = 8 \cdot 36 + 29 = 317 \Rightarrow b = 7$
$...a = 8 \cdot 35 + 31 = 311 \Rightarrow a = 1$
$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = 6 \cdot 7 \cdot 1 = 42$

Clave C

28. $C.A.\left(\overline{(x^2)(y + 3)x}\right) = 1000 - \overline{(x^2)(y + 3)x}$
$9 - (y + 3) = 4;\ \ 9 = x^2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow z = 7$
$9 - 3 - 4 = y$
$y = 2$

Luego:
$C.A.[C.A.\overline{(z - 5)(y^3)(x + 3)}]$
$\Rightarrow \overline{(z - 5)y^3(x + 3)} = 286$

Luego: $C.A.\ [C.A.\ (286)] = 286$
$\therefore 2 + 8 + 6 = 16$

Clave A

29.
$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline 27 & 43 \end{array} \Rightarrow D = 43(d) + 27$$

Luego:
$$\begin{array}{l|l} D + 108 & d \\ \hline 15 & 46 \end{array} \Rightarrow D + 108 = d(46) + 15$$

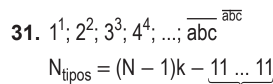
Luego:
$43d + 27 + 108 = 46d + 15$
$120 = 3d$
$d = 40$

Clave C

30. Sea: $R = \overline{abc}$
$\overline{abc} \times 427 = ...021$
$\overline{abc} \times 375 = ...625$
$\Rightarrow \overline{abc} = 623$

Luego:
$623 \times 216 = 134\ 568$
$\therefore 5 + 6 + 8 = 19$

Clave D



31. $1^1; 2^2; 3^3; 4^4; ...; \overline{abc}^{\overline{abc}}$

$N_{tipos} = (N - 1)k - \underbrace{11 \dots 11}_{k \text{ cifras}}$

$522 = (\overline{abc} - 1)3 - 111$

$633 = (\overline{abc} - 1)3$

$211 = \overline{abc} - 1 \Rightarrow \overline{abc} = 212$

$a + b + c = 2 + 1 + 2 = 5$

Clave D

32. Del enunciado:

$a - b = 191 \Rightarrow a = 191 + b$

Además:

$a = 6 \times b + b - 1$

$191 + b = 7b - 1$

$b = 32$

$\Rightarrow a = 223$

$\therefore 2 + 2 + 3 = 7$

Clave E

33. Tenemos:

$\underbrace{\overline{ab}; ...; 99;}_{n \text{ números}} \underbrace{100; ...\overline{ab0}}_{m \text{ números}}$

Luego:

$n = 99 - \overline{ab} - 1 = 100 - \overline{ab}$

$m = \overline{ab0} - 100 + 1 = \overline{ab0} - 99$

Sabemos que en total se usan 883 cifras:

$2(100 - ab) + 3\,(ab0 - 99) = 883$

$ab = 35$

Nos piden la cantidad de cifras de 53 hasta 305:

$\underbrace{53; ...99;}_{47} \underbrace{100; ...305}_{206}$

En total se utilizan: $206 + 47 = 253$

Clave C

MARATÓN MATEMÁTICA (página 26)

1.

```
      4 5 4 3 2 ×
            3 1
      ---------
      4 5 4 3 2
  1 3 6 2 9 6
  -------------
  1 4 0 8 3 9 2
```

La suma de cifras del producto es: 27

2. $(10 - 3) \times (\underbrace{333 \dots 333}_{50 \text{ cifras}})$

$= \underbrace{333 \dots 330}_{51 \text{ cifras}} - \underbrace{999 \dots 999}_{50 \text{ cifras}}$

$= \underbrace{233 \dots 331}_{51 \text{ cifras}}$

Piden: $3 \times 49 + 2 + 1 = 150$

Clave D

3. $N\,.\,b < N\,.\,a$

$b < a$

$\Rightarrow \overline{bab}\,.\,N = 101bN + 10aN$

$= 101(1570) + 10(4710)$

$= 158\,570 + 47\,100$

$= 205\,670$

Piden: $2 + 0 + 5 + 6 + 7 + 0 = 20$

Clave A

4. $\overline{x11} + \overline{x22} + \overline{x33} + ... + \overline{x99} = \overline{4nny}$

$100x\,.\,9 + 11(1 + 2 + 3 + ... + 9) = \overline{4nny}$

$900x + 495 = \overline{4nny}$

$\Rightarrow y = 5; n = 9$

Luego:

$900x + 495 = 4995$

$900x = 4500$

$x = 5$

Piden: $x + y + n = 5 + 5 + 9 = 19$

Clave B

5. $1100_{(n)} - 11_{(n)} = 41_{(12)} \times (n - 1)$

$n^3 + n^2 - n - 1 = 49 \times (n - 1)$

$(n + 1)(n^2 - 1) = 49 \times (n - 1)$

$(n + 1)^2 = 49$

$n + 1 = 7$

$n = 6$

Piden: $n^3 = 6^3 = 216$

Clave E

6. $\overline{b(3 - b^2)(b + 2)} = \overline{xyzt}_{(4)}$

$\downarrow$

1

$123 = \overline{xyzt}_{(4)}$

$1323_{(4)} = \overline{xyzt}_{(4)}$

Piden: $x + y + z + t + b = 1 + 3 + 2 + 3 + 1 = 10$

Clave D

7. $\underbrace{(p \vee q)}_{V} \wedge \underbrace{(p \Leftrightarrow q)}_{V}$

V

$p \vee q \equiv V$ $\quad$ $p \Leftrightarrow q \equiv V$

V $\;$ V $\quad\quad$ V $\;$ V

$\quad\quad\quad\quad$ F $\;$ F

Clave A

8.

I. $V \Rightarrow F \equiv F$

II. $V \wedge F \equiv F$

III. $V \vee F \equiv V$

IV. $V \Leftrightarrow V \equiv V$

Clave C

9.

- $x^3 - x = 0$
  $x(x + 1)(x - 1) = 0$
  $\Rightarrow M = \{0; 1; -1\}$
- $N = \{6\}$
- $P = \{...; -3; -2; -1\}$

Clave B

10. $n(A \cap B) = 8 + 6 - 9 = 5$

$\Rightarrow n(A \,\Delta\, B) = 9 - 5 = 4$

Clave D

Unidad 2

TEORÍA DE LA DIVISIBILIDAD

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 31) Unidad 2

Comunicación matemática

1.

2. De la pirámide aditiva tenemos:

$\overset{\circ}{9} + a = (\overset{\circ}{9} + 3) + (\overset{\circ}{9} + 4) \Rightarrow a = 7$

$\overset{\circ}{9} + b = (\overset{\circ}{9} + 4) + (\overset{\circ}{9} + 2) \Rightarrow b = 6$

$\overset{\circ}{9} + c = (\overset{\circ}{9} + 2) + (\overset{\circ}{9} + 1) \Rightarrow c = 3$

$\overset{\circ}{9} + d = (\overset{\circ}{9} + 7) + (\overset{\circ}{9} + 6) = \overset{\circ}{9} + 13$

$\overset{\circ}{9} + d = \overset{\circ}{9} + 4 \Rightarrow d = 4$

$\overset{\circ}{9} + e = (\overset{\circ}{9} + 4) + \overset{\circ}{9}$

$\overset{\circ}{9} + e = \overset{\circ}{9} + 4 \Rightarrow e = 4$

$\therefore a + b + c + d + e = 7 + 6 + 3 + 4 + 4 = 24$

3. $(\overset{\circ}{7} + 2)(\overset{\circ}{7} + 3) = \overset{\circ}{7} + \boxed{6}$

$(\overset{\circ}{5} + 4)(\overset{\circ}{5} + 3) = \overset{\circ}{5} + 12 = \overset{\circ}{5} + \boxed{2}$

$(\overset{\circ}{3} + 1)(\overset{\circ}{3} + 2) = \overset{\circ}{3} + 2 = \overset{\circ}{3} - \boxed{1}$

$(\overset{\circ}{13} + 4)(\overset{\circ}{13} + 4) = \overset{\circ}{13} + 16 = \overset{\circ}{13} + \boxed{3}$

$(\overset{\circ}{11} - 2)(\overset{\circ}{11} - 7) = \overset{\circ}{11} + 14 = \overset{\circ}{11} + 3 = \overset{\circ}{11} - \boxed{8}$

Razonamiento y demostración

4. I. F

$\overset{\circ}{9} + 64 = \overset{\circ}{9} + 1$

II. V

$(\overset{\circ}{5} - 3)^2 = \overset{\circ}{5} + 9 = \overset{\circ}{5} - 1$

III. F

$\overset{\circ}{13} - \overset{\circ}{13} = \overset{\circ}{13}$

IV. F

$\overset{\circ}{7} - 4 = \overset{\circ}{7} + 3$

Clave D

5. I. V II. V III. V IV. F

$\underset{-1231}{1517} \Rightarrow -1 + 10 + 3 + 7 = 19 = \overset{\circ}{7} + 5$

Resolución de problemas

6. $8a + 4 = \overset{\circ}{5}$

$4(2a + 1) = \overset{\circ}{5} \Rightarrow 2a + 1 = \overset{\circ}{5}$

$2a + 1 + 5 = \overset{\circ}{5} + 5$

$2a + 6 = \overset{\circ}{5}$

$2(a + 3) = \overset{\circ}{5} \Rightarrow a + 3 = \overset{\circ}{5}$

$a = \overset{\circ}{5} - 3$

$a = \overset{\circ}{5} + 2$

$a = 5(0) + 2 = 2$
$a = 5(1) + 2 = 7$
$a = 5(2) + 2 = 12$
} Tres primeros valores positivos

Piden la suma: $2 + 7 + 12 = 21$

Clave B

7. Divisores positivos de 8: {1; 2; 4; 8}

Piden:

$1^2 + 2^2 + 4^2 + 8^2 = 1 + 4 + 16 + 64 = 85$

Clave A

8. Sea el número: $N = 6k$

$10 < N < 40$

$10 < 6k < 40$

$1{,}6 < k < 6{,}6$

→ 2; 3; 4; 5; 6

N: 12; 18; 24; 30; 36

↓ 12 → $\overset{\circ}{4}$; 18 → $\overset{\circ}{9}$; 24 → $\overset{\circ}{4}$; 36 → $\overset{\circ}{9}$

$\therefore N = 30$

Clave B

9. $\overline{aaa5} = \overset{\circ}{3} + r$

$3a + 5 = \overset{\circ}{3} + r$

$r = 2$

Clave A

10. $\overline{ab37} = \overset{\circ}{9}$

$10 + a + b = \overset{\circ}{9}$

$a + b = 8; 17$

$\overline{ab21} = \overset{\circ}{9} + r$

$a + b + 3 = \overset{\circ}{9} + r$

Si: $a + b = 8 \Rightarrow r = 2$

$a + b = 17 \Rightarrow r = 2$

$\therefore$ Residuo = 2

Clave A

Nivel 2 (página 31) Unidad 2

Comunicación matemática

11. Del enunciado:

$5 \times \overline{a87} = \overset{\circ}{11} \times \overline{mn}$

$5 \times \overline{a87} = \overset{\circ}{11}$

$\Rightarrow \overline{a87} = \overset{\circ}{11}$
$\quad + - +$

Luego:

$a - 8 + 7 = \overset{\circ}{11}$

$a - 1 = \overset{\circ}{11}$

$\Rightarrow a = 1$

12.
- $\overline{a\,b\,c\,d} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow b + d - a - c = \overset{\circ}{11}$ (V)
  $- + - +$
- $\overline{a\,b\,c\,d} = \overset{\circ}{3} \Rightarrow a + b + c + d = \overset{\circ}{3}$ (F)
- $\overline{a\,b\,c\,d} = \overset{\circ}{7} \Rightarrow 2b + 3c + d - a = \overset{\circ}{7}$ (F)
  1 2 3 1
  $- \ +$
- $\overline{a\,b\,c\,d} = \overset{\circ}{13} \Rightarrow d - a - 4b - 3c = \overset{\circ}{13}$ (V)
  1 4 3 1
  $- \ +$

Razonamiento y demostración

13. I. V

$M + N = \overset{\circ}{7}$, entonces:

$3M + 10N = 3\underbrace{(M + N)}_{\overset{\circ}{7}} + 7N = \overset{\circ}{7} + \overset{\circ}{7} = \overset{\circ}{7}$

II. F

$4A = \overset{\circ}{15} + 3 \Rightarrow 4A = \overset{\circ}{15} + 3 + 45$

$4A = \overset{\circ}{15} + 48$

$4(A - 12) = \overset{\circ}{15}$

$A - 12 = \overset{\circ}{15}$

$A = \overset{\circ}{15} + 12$

III. V

$A = \overline{aa0}_{(2)} = \overset{\circ}{2} \wedge B = \overset{\circ}{2}$

$\Rightarrow A + B = \overset{\circ}{2} + \overset{\circ}{2} = \overset{\circ}{2}$

14. I. V

Si m = 4 y n = 3:

$\overline{abc}_{(3)} = \overset{\circ}{4} = 4k,\ k \in \mathbb{Z}^+$

Luego:

$3^2 \le \overline{abc}_{(3)} \le 3^3 - 1$

$9 \le 4k \le 26$

$2{,}25 \le k \le 6{,}5$

→ $\underbrace{3; 4; 5; 6}_{4 \text{ valores}}$

II. F

Si m = 7; n = 5:

$\overline{abc}_{(5)} = \overset{\circ}{7} = 7k,\ k \in \mathbb{Z}^+$

Luego:

$5^2 \le \overline{abc}_{(5)} \le 5^3 - 1$

$25 \le 7k \le 124$

$3{,}57 \le k \le 17{,}71$

→ 4; 5; 6; ...; (17) mayor valor

$\Rightarrow \overline{abc}_{(5)} = 7 \times 17$

$\overline{abc}_{(5)} = 119 = 434_{(5)}$

Por lo tanto, el máximo valor de $\overline{abc}$ es 434.

III. V

Si n = m, entonces:

$\overline{abc}_{(n)} = \overset{\circ}{n};\ n > 2$

Luego:

$\overline{abc}_{(n)} = \overset{\circ}{n} + c = \overset{\circ}{n}$

$\Rightarrow c = \overset{\circ}{n}$ <
- 0 ✓ (c < n)
- n ✗
- 2n ✗
- ⋮

$c = 0$

Clave C

Resolución de problemas

15. $x = \overset{\circ}{4} \wedge x < 40$

$x \in \{36; 32; 28; 24; 20; 16; 12; 8; 4; 0\}$

$\therefore n(A) = 10$

Clave D

16. $J < 50$

$3J = \overset{\circ}{5} \Rightarrow J = \overset{\circ}{5}$

$2J = \overset{\circ}{14} \Rightarrow J = \overset{\circ}{7}$

$\overset{\circ}{7}$ y $\overset{\circ}{5} = \overset{\circ}{35} \Rightarrow$ 35 años

Clave D

17. $\overline{4xy7328} = \overset{\circ}{99} + 34$

$\overline{4xy7294} = \overset{\circ}{99}$

$4 + \overline{xy} + 72 + 94 = \overset{\circ}{99}$

$\overline{xy} + 71 = \overset{\circ}{99} \Rightarrow x = 2 \wedge y = 8$

$\therefore \sqrt{y^x} = \sqrt{8^2} = 8$

Clave B

18. $\overline{9n8n} = \overset{\circ}{11}$

$-+-+$

$2n - 17 = \overset{\circ}{11}$

$\Rightarrow n = 3$

Luego:

$\overline{abc} = 9383 \div 11$

$\overline{abc} = 853$

$\therefore b = 5$

Clave B

19. $\overline{5a7b} = \overset{\circ}{143} \begin{cases} \overset{\circ}{11} \\ \overset{\circ}{13} \end{cases}$

- $\overline{5a7b} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow a + b = \overset{\circ}{11} + 1$
  $-+-+$ $\quad a + b : 1, 12$

- $\overline{5\ a\ 7b} = \overset{\circ}{13} \Rightarrow -4a + b - 26 = \overset{\circ}{13}$
  $-1\ -4\ -3\ 1$ $\quad -4a + b = \overset{\circ}{13}$
  $5a = \overset{\circ}{13} + a + b$

Si $a + b = 1$: $5a = \overset{\circ}{13} + 1$

$5a = \overset{\circ}{13} + 1 + 39$

$a = \overset{\circ}{13} + 8$

$a = 8$ (no cumple)

Si $a + b = 12$: $5a = \overset{\circ}{13} + 12$

$5a = \overset{\circ}{13} + 12 + 13$

$a = \overset{\circ}{13} + 5$

$a = 5 \Rightarrow b = 7$

Piden: $a \times b = 5 \times 7 = 35$

Clave B

20. Si: $\overline{a2a3aba} = \overset{\circ}{45}$ ($\overset{\circ}{9}$, $\overset{\circ}{5}$)

$\overline{a2a3aba} = \overset{\circ}{9} \wedge \overline{ba} = \overset{\circ}{5} \Rightarrow a = 5$

$5 + 4a + b = \overset{\circ}{9}$

$25 + b = \overset{\circ}{9}$

$7 + b = \overset{\circ}{9}$

$b = 2$

$\Rightarrow a + b = 5 + 2 = 7$

Clave C

Nivel 3 (página 32) Unidad 2

Comunicación matemática

21.

- $\overline{5m9} = \overset{\circ}{13} \Rightarrow 9 - 3m - 20 = \overset{\circ}{13}$
  $4\,3\,1$ ($-\ +$) $\quad -3m - 11 = \overset{\circ}{13}$
  $3m + 11 = \overset{\circ}{13} \Rightarrow m = 5$
  $\downarrow$ 5

- $\overline{a\,8\,6} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow a + 6 - 8 = \overset{\circ}{11}$
  $+-+$ $\quad a - 2 = \overset{\circ}{11} \Rightarrow a = 2$

- $\overline{2\,2\,c} = \overset{\circ}{7} \Rightarrow 4 + 6 + c = \overset{\circ}{7}$
  $2\,3\,1$ ($+$) $\quad 3 + c = \overset{\circ}{7} \Rightarrow c = 4$

Luego:

$a = 2$	$<$	4
$m = 5$	$=$	5
$a + c + 3 = 9$	$>$	5

22. $A = [(\overset{\circ}{5} + 4)(\overset{\circ}{5} + 3) + \overset{\circ}{5} + 2]^{314}$

$A = [(\overset{\circ}{5} + \boxed{2}) + \overset{\circ}{5} + \boxed{2}]^{\boxed{314}}$

$A = [\overset{\circ}{5} + \boxed{4}]^{\boxed{314}}$

$A = \overset{\circ}{5} + \boxed{4}^{\boxed{314}}$ ... (I)

$4^{314} = (\overset{\circ}{5} - 1)^{314} = \overset{\circ}{5} + 1$

$A = \overset{\circ}{5} + (\overset{\circ}{5} + \boxed{1})$

$A = \overset{\circ}{5} + \boxed{1}$

$\Rightarrow x = 2; y = 2; z = 1; w = 1$

$\therefore x + y + z + w = 6$

Razonamiento y demostración

23. I. V

$a + b + c = \overset{\circ}{11} \begin{cases} 11 \\ 22 \\ 33 \end{cases}$ $(a + b + c)_{máx.} = 27$

Como piden el mayor valor de $\overline{a6b5c}$, entonces: $a + b + c = 22$

Luego:

$a + b + c + 6 + 5 = 22 + 11 = 33 = \overset{\circ}{3}$

$\Rightarrow \overline{a6b5c} = \overset{\circ}{3}$

II. V

$\overline{xyz} - \overline{zyx} = \overline{mnp}$

Se cumple:

$m + p = 9 \wedge n = 9 \Rightarrow \overline{mnp} = \overset{\circ}{9}$

III. V

$A = B \Rightarrow A - B = 0 = \overset{\circ}{n};\ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

24. I. V

$N = \overline{(\overline{ab})(\overline{cd})(\overline{ef})}_{(\overline{mn})} = \overset{\circ}{\overline{mn}} + 13$

$\overset{\circ}{\overline{mn}} + \overline{ef} = \overset{\circ}{\overline{mn}} + 13$

$\overline{ef} = \overset{\circ}{\overline{mn}} + 13$

$\Rightarrow \overline{ef} = 13;\ \overline{ef} < \overline{mn}$

II. F

Si $\overline{cd} = \overline{ef}$ entonces:

$N = \overline{(\overline{ab})(\overline{cd})(\overline{cd})}_{(\overline{mn})}$

$N = \overset{\circ}{\overline{mn}^2} + \overline{(\overline{cd})(\overline{cd})}_{(\overline{mn})} = \overset{\circ}{\overline{mn}^2} + 143$

$\overline{(\overline{cd})(\overline{cd})}_{(\overline{mn})} = \overset{\circ}{\overline{mn}^2} + 143$

$\Rightarrow \overline{(\overline{cd})(\overline{cd})}_{(\overline{mn})} = 143$

Ya que $\overline{(\overline{cd})(\overline{cd})}_{(\overline{mn})}$ debe ser menor que $\overline{mn}^2$, luego:

$\overline{cd} \times \overline{mn} + \overline{cd} = 143$

$\overline{cd} \times (\overline{mn} + 1) = 11 \times 13$ $(\overline{cd} < \overline{mn})$

$\Rightarrow \overline{cd} = 11 \wedge \overline{mn} = 12$

$\therefore m + n = 3$

III. F

Si $\overline{mn} = 11$:

$N = \overline{(\overline{ab})(\overline{cd})(\overline{ef})}_{(11)}$

Entonces:

$\overline{ab} = \overline{cd} = \overline{ef} = 10$

Luego:

$N = 11^3 - 1 = 1331 - 1 = 1330$

Clave A

Resolución de problemas

25. k: número de naranjas

$k = \begin{cases} \overset{\circ}{3} + 1 \\ \overset{\circ}{5} - 4 = \overset{\circ}{5} + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow k = \overset{\circ}{\text{MCM}(3; 5)} + 1$

$k = \overset{\circ}{15} + 1$

k: 1; 16, 31; 46, 61; ... $(40 < k < 60)$

$\therefore k = 46$

Clave B

26. C. A. $(\overline{5x2x3}) = \overset{\circ}{11}$

$\overline{(9-5)(9-x)(9-2)(9-x)(10-3)} = \overset{\circ}{11}$

$\overline{4(9-x)7(9-x)7} = \overset{\circ}{11}$

$+\ -\ +\ -\ +$

$4 + 7 + 7 - (9 - x) - (9 - x) = \overset{\circ}{11}$

$18 - 18 + 2x = \overset{\circ}{11}$

$2x = \overset{\circ}{11}$

$x = \overset{\circ}{11} \Rightarrow x = 0$

Clave E

27. $\overline{517m}_{(9)} + \overline{41m34}_{(9)} = \overset{\circ}{9}$

$(\overset{\circ}{9} + m) + (\overset{\circ}{9} + 4) = \overset{\circ}{9}$

$\overset{\circ}{9} + \underbrace{m + 4}_{\overset{\circ}{9}} = \overset{\circ}{9}$

Luego: $m + 4 = \overset{\circ}{9} \Rightarrow m = 5$

Clave E

28. $\overline{abc9cba} = \overset{\circ}{5} \Rightarrow a = 5$

Como:

$\overline{5bc9cb5}$ $\begin{cases} \overset{\circ}{9} \\ \overset{\circ}{11} \end{cases}$ $\overset{\circ}{99}$

Luego:

$5 + \overline{bc} + \overline{9c} + \overline{b5} = \overset{\circ}{99}$

$5 + 10b + c + 90 + c + 10b + 5 = \overset{\circ}{99}$

$20b + 2c + 1 = \overset{\circ}{99}$

$20b + 2c = \overset{\circ}{99} + 98$

$10b + c = \overset{\circ}{99} + 49$

$\downarrow\ \ \downarrow$

$4\ \ \ 9$

$\Rightarrow \overline{abc9cba} = 5499945$

$\therefore$ La suma de cifras es 45.

Clave A

29. $(\underbrace{\overline{1842abcabc\ldots abc}}_{2014\ \text{cifras}})^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{7} + r$

$2014 = 4 + 2010 = 4 + \overset{\circ}{6}$

Por el criterio de divisibilidad por 7 se eliminarán en grupos de 6, luego quedará:

$(\overline{1842abcabc\ldots abcabc})^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{7} + r$

$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$

1231

$-\ +$

$(\overset{\circ}{7} - 1 + 16 + 12 + 2)^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{7} + r$

$(\overset{\circ}{7} + 1)^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{7} + r$

$\overset{\circ}{7} + 1^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{7} + r$

$\Rightarrow r = 1$

Clave D

30. $\overline{abc}^{\overline{abc}} = \overline{abc}^{100a + 10b + c}$

$= (\overline{abc}^{a})^{100} . (\overline{abc}^{b})^{10} . (\overline{abc}^{c})$

$= (\overset{\circ}{9} + 4)^{100} . (\overset{\circ}{9} + 5)^{10} . (\overset{\circ}{9} - 1)$

$= (\overset{\circ}{9} + 4^{100})(\overset{\circ}{9} + 5^{10})(\overset{\circ}{9} - 1)$

$= (\overset{\circ}{9} + (4^{3})^{33} . 4)(\overset{\circ}{9} + (5^{3})^{3} . 5)(\overset{\circ}{9} - 1)$

$= \overset{\circ}{9} + (\overset{\circ}{9} + 1)^{33} . 4 . (\overset{\circ}{9} - 1)^{3} . 5 . (-1)$

$= \overset{\circ}{9} + (\overset{\circ}{9} + 1^{33})(\overset{\circ}{9} + (-1)^{3}) . (-20)$

$= \overset{\circ}{9} - (\overset{\circ}{9} + 1)(\overset{\circ}{9} - 1)\ (\overset{\circ}{9} + 2)$

$= \overset{\circ}{9} - (\overset{\circ}{9} - 2) = \overset{\circ}{9} + 2$

Clave A

31. $\Rightarrow \overset{\circ}{5}; \overset{\circ}{8}$ y $\overset{\circ}{9}$

$\Rightarrow$ es múltiplo de $5 \times 8 \times 9 = \overset{\circ}{360}$ (mcm)

$\Rightarrow$ el menor número $= 360$

$\Rightarrow 3 + 6 + 0 = 9$

Clave E

32. Si $\overline{abccba} = \overset{\circ}{7} \Rightarrow a + 3b + 2c - (c + 3b + 2a)$

$= c - a = \overset{\circ}{7}$

Entonces:

c–a:–7; 0; 7

Como $a \neq c$:

$c - a = \begin{cases} -7 \\ 7 \end{cases}$

Si $\underbrace{\overline{acac\ldots}}_{54\ \text{cifras}} = \overset{\circ}{11} + r \Rightarrow c - a + c - a + \ldots = \overset{\circ}{11} + r$

$\Rightarrow 27(c - a) = \overset{\circ}{11} + r$

Si $c - a = -7$:

$27(-7) = \overset{\circ}{11} + r$

$-189 = \overset{\circ}{11} + r$

$\overset{\circ}{11} + 9 = \overset{\circ}{11} + r$

$r = 9$

Si $c - a = 7$:

$27(7) = \overset{\circ}{11} + r$

$189 = \overset{\circ}{11} + r$

$\overset{\circ}{11} + 2 = \overset{\circ}{11} + r$

$r = 2$

Piden el menor residuo, por lo tanto: $r = 2$

Clave D

33. Observamos que:

- $2^{3k+1} = (\overset{\circ}{7} + 1)^{k} . 2 = \overset{\circ}{7} + 2$
- $2^{6k+4} = (\overset{\circ}{7} + 1)^{k} . 16 = (\overset{\circ}{7} + 1)(\overset{\circ}{7} + 2) = \overset{\circ}{7} + 2$
- $2^{3} = \overset{\circ}{7} + 1$

$\Rightarrow E = \overset{\circ}{7} + 2 + \overset{\circ}{7} + 2 + \overset{\circ}{7} + 1$

$E = \overset{\circ}{7} + 5$

Residuo $= 5$

Clave C

34. $\overline{mn} + \overline{pq} = \overset{\circ}{33}$

$3\overline{pq} + \overline{pq} = \overset{\circ}{33}$

$4\overline{pq} = \overset{\circ}{33}$

$\overline{pq} = \overset{\circ}{33}$

$\Rightarrow \overline{pq} = 33 \wedge \overline{mn} = 99$

Piden:

$m + n + p + q = 9 + 9 + 3 + 3 = 27$

Clave D

35. $\overline{a(a+1)(a+2)(a+3)} + 988 = \overset{\circ}{44}$

$\overline{aaaa} + 123 + 20 = \overset{\circ}{44}$

$\overline{aaaa} + 11 = \overset{\circ}{44}$

$1111a + 11 = \overset{\circ}{44}$

$101a + 1 = \overset{\circ}{4}$

$a = \overset{\circ}{4} + 3$

$\Rightarrow a = 3$

Piden: $3 + 4 + 5 + 6 = 18$

Clave A

36. $978 = 6 \times 163$

$\overline{\underbrace{176a04}_{6\ \text{cifras}}\ \underbrace{176a04}_{6\ \text{cifras}}\ldots 176a040}$

1431431

$+\ -\ +$

Se debe cumplir:

$\overline{176a04} = \overset{\circ}{13}$

143143

$-\ +$

$1 + 28 + 18 - a - 12 = \overset{\circ}{13}$

$a - 35 = \overset{\circ}{13}$

$a = \overset{\circ}{13} + 9$

$a = 9$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 36) Unidad 2

Comunicación matemática

1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4. I. F

II. V
CD(13) = 2 < 3

III. V
$SD(3^3) = \dfrac{3^4 - 1}{3 - 1} = \dfrac{80}{2} = 40$

5. I. V
Divisores de 47; 1 y 47
$PD(47) = 1 \times 47 = 47 = \underbrace{48 - 1}_{SD(47)}$

$\Rightarrow PD(47) = SD(47) - 1$

II. V

III. F
$13^n + 13^{n-1} + ... + 1 > 13 + 1; n > 1$

Clave B

Resolución de problemas

6.

1620	2
810	2
405	3
135	3
45	3
15	3
5	5

$1620 = 2^2 \times 3^4 \times 5$
$C.D. = (2 + 1)(4 + 1)(2) \Rightarrow 15 \times 2 = 30$
De 2 cifras: $3^2 \times 2(2 \times 3^2 \times 5)$
$(2 + 1)(2)(2) + 1 = 13$

Clave D

7. $4^{2n} = (2^2)^{2n} = 2^{4n}$
$C.D.(2^{4n}) = 81$
$(4n + 1) = 81$
$4n = 80 \quad \therefore \; n = 20$

Clave A

8. $N = 6^n . 15$
$N = 3^n . 2^n . 3 . 5 = 3^{n+1} . 2^n . 5$
$C. D._N = (n + 1 + 1)(n + 1)(1 + 1) = 84$
$\Rightarrow (n + 2)(n + 1) = 42 \qquad \therefore \; n = 5$

Clave B

9. $N = 21 . 15^a$
$N = 7 . 3 . 5^a . 3^a = 7 . 3^{a+1} . 5^a$
$C. D._{SIMPLES} = 4$
$C. D._N = 2 . (a + 1)(a + 2)$
$C. D_{COMPUESTOS} = 2(a + 1)(a + 2) - 4 = 20$
$2(a + 1)(a + 2) = 24$
$(a + 1)(a + 2) = 12$
$\Rightarrow a = 2$

Clave B

10. $720 = 2^4 . 3^2 . 5$
$C.D.(720) = (4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 5 . 3 . 2$
$\therefore C.D. = 30$

Clave C

Nivel 2 (página 36) Unidad 2

Comunicación matemática

11.

12.

Razonamiento y demostración

13. I. F
$2925 = 3^2 \times 5^2 \times 13$
$CD(2925) = (2 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 18$
$\Rightarrow PD(2925) = (2925)^{18/2} = 2925^9$

II. V
$8580 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 \times 13$
$CD_{simples}(8580) = 5 + 1 = 6$

III. F

14. I. V
$a = 1 \;\wedge\; 0 \leq b + 1 \leq 1$
$-1 \leq b \leq 0$
Entonces

$\overline{a(b + 1)}_{(2)} = \begin{cases} 10_{(2)} = 2 \\ 11_{(2)} = 3 \end{cases}$

II. F
Si $N = 21 = \overset{\circ}{4} + 1$;
N no es un número primo

III. F
Si p = 7, entonces 2p + 1 = 15 no es primo.

Clave A

Resolución de problemas

15. $18\,000 \Rightarrow 2^4 . 3^2 . 5^3 \Rightarrow 60$ div.
15 div. múltiplos de otros números
$C.D.(\overset{\circ}{5}) = 5(\underbrace{2^4 . 3^2 . 5^2}) \Rightarrow 45$

$C.D.(\overset{\circ}{6} \wedge \neq \overset{\circ}{5}) = 5^2 . 2 . 3(\underbrace{2^3 . 3}_{4 \times 2 = 8})$

Clave B

16. $\overline{abcd} = a^2 \times \underbrace{(a + 4)}^3$

$\downarrow$
$3^2 \times 7^3 \Rightarrow 3087$
4
5
6
⋮
9

$\Rightarrow a = 3; b = 0; c = 8; d = 7$
$\therefore a + b + c + d = 18$

Clave D

17. $N = 4^{n+1} + 4^n + 4^{n-1}$
$N = 4^n\left(4 + 1 + \dfrac{1}{4}\right) = 4^n . \dfrac{21}{4}$
$N = 7 . 3 . 2^{2n-2}$
$\Rightarrow C. D._N = (2)(2)(2n - 1) = 36$
$\Rightarrow 4(2n - 1) = 36$
$2n - 1 = 9$
$\therefore \; n = 5$

Clave C

18. $420 = 7 . 6 . 10 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$
$CD(420) = 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$
Piden: $= \dfrac{CD(420)}{2} = \dfrac{24}{2} = 12$

Clave C

19. $N_1 = 14 . 30^n \qquad N_2 = 21 . 15^n$
$\downarrow \qquad \downarrow$
$7 \times 2 \times (5 \times 2 \times 3)^n \qquad 7 \times 3 \times 5^n \times 3^n$
$N_1 = 7 \times 2^{n+1} \times 3^n \times 5^n; N_2 = 3^{n+1} \times 7 \times 5^n$
$2(n + 2)(n + 1)^2 + 2(n + 2)(n + 1) = 96$
$2(n + 2)(n + 1)[n + 1 + 1] = 96$
$(n + 2)^2(n + 1) = 48$
$n = 2$
$N_1 = 14 \times 30^2 \qquad N_2 = 21 \times 15^2$
$N_1 = 12\,600 \qquad N_2 = 4725$

Clave B

20. $N = \overline{aabb}$ tiene 21 divisores, entonces:
$CD(N) = (2 + 1) \times (6 + 1)$
N es $\overset{\circ}{11}$
$N = 11 \times \overline{a0b}$;
p: primo
$\Rightarrow p = 2 \Rightarrow 11 \times 2^6 = 704$

Luego:
$N = 11^2 . 2^6 \Rightarrow a = 7$
$b = 4$

Sabemos:
n.° divisores: (2 + 1)(6 + 1) = 21
$\therefore a - b = 3$

Clave C

Nivel 3 (página 37) Unidad 2

Comunicación matemática

21.

22.

Razonamiento y demostración

23. I. F

$n = 0$: $2^{2^0} - 1 = 2^1 - 1 = 1$ (no es primo)

$n = 2$: $2^{2^2} - 1 = 16 - 1 = 15$ (no es primo)

II. V

$N = \overline{pq} + q = 10p + 2q = 2(\underbrace{5p + q}_{\text{Entero} > 1})$

$\Rightarrow$ N va a ser $\overset{\circ}{2}$

$\therefore$ N no puede ser un número primo.

III. F

Para $a = 2$ y $b = 1$ (son PESÍ), entonces $a + b = 3$ y $b = 1$ también son PESÍ.

Clave C

24. I. F

Si $n = 2$, entonces: $N = 22 = 2 \times 11$, luego: $CD(22) = 4$

II. V

Si $n = 9$, entonces: $N = 99 = 3^2 \times 11$

Luego: $CD(N) = 3 \times 2 = 6$

III. V

$N = \overline{nn} = n \times 11 \Rightarrow N = 11$

$n \to 1; 3; 5; 7$

Si $n = 1$:

Divisores de N: 1; 11

Luego: $PD(N) = 1 \times 11 = 11$

Resolución de problemas

25. $\overline{(2a)(2a+1)a(a+2)} = \overset{\circ}{9} + 3$

$\overline{(2a)(2a+1)a(a-1)} = \overset{\circ}{9}$

Suma de cifras $= \overset{\circ}{9}$

$2a + 2a + 1 + a + a - 1 = \overset{\circ}{9}$

$6a = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a = \overset{\circ}{3}$

- $a = 3$

  $233 \Rightarrow 1 \times 233$

  $S.D. = \dfrac{233^2 - 1}{233 - 1} = 234$

- $a = 6$ × (2a debe ser una cifra)

  $266 \Rightarrow 2 \times 7 \times 19$;

  $S.D. = \dfrac{2^2 - 1}{2 - 1} \cdot \dfrac{7^2 - 1}{7 - 1} \cdot \dfrac{19^2 - 1}{19 - 1} = 360$

- $a = 9$ × (2a debe ser una cifra)

  $299 \Rightarrow 23 \times 13$

  $S.D. = \dfrac{23^2 - 1}{23 - 1} \cdot \dfrac{13^2 - 1}{13 - 1} = 236$

  Luego la suma de divisores es 234.

Clave E

26. $A = 60^n . 45 \wedge B = 15 . 20^n$

$A = (3 . 5 . 2^2)^n . 3^2 . 5 \wedge B = 5 . 3 . 5^n . 2^{2n}$

$A = 3^{2+n} . 5^{n+1} . 2^{2n} \wedge B = 3 . 2^{2n} . 5^{n+1}$

Tienen en común 40 divisores.

$\Rightarrow M = 3 . 5^{n+1} . 2^{2n}$

$C.D._M = 40 = (2)(n + 2)(2n + 1)$

$\Rightarrow (n + 2)(2n + 1) = 20$

$\therefore n = 2$

Clave C

27. $N = a^3 . b . c$

$C.D._{SIMPLES} = 4 \wedge a + b + c + 1 = 16$

$a + b + c = 15$

$N = a^3 . b . c$ cumple para:

$a = 3 \wedge b = 5 \wedge c = 7$

$N = 3^3 . 5 . 7 = 5(3^3 . 7)$

$\therefore S.D._{\overset{\circ}{5}} = \left(\dfrac{3^4 - 1}{3 - 1} . \dfrac{7^2 - 1}{7 - 1}\right) = 1600$

Clave C

28. $N = a^n . b . c$

$S.D._N = 168 \wedge \overline{ab} = 4c + 3 \wedge \overline{ac} = 8b + 1$

$\Rightarrow 10a + b = 4c + 3 \wedge 10a + c = 8b + 1$

Reemplazando:

$8b + 1 - c + b = 4c + 3$

$9b = 5c + 2$

Cumple la igualdad: $b = 3 \wedge c = 5$

$\Rightarrow 10a + 3 = 4(5) + 3$

$10a = 20$

$a = 2$

$S.D._N = 168 = \left(\dfrac{2^{n+1} - 1}{1}\right)\left(\dfrac{3^2 - 1}{2}\right)\left(\dfrac{5^2 - 1}{4}\right)$

$\Rightarrow (2^{n+1} - 1)(4)(6) = 168$

$\Rightarrow 2^{n+1} - 1 = 7$

$2^{n+1} = 8$

$\Rightarrow n = 2$

$\therefore N = 2^2 . 3 . 5 = 60$

Clave B

29. $\overline{2m}$; $\overline{m(m+3)}$; $\overline{3m(m-1)}$ son PESÍ 2 a 2.

$m = 2 \Rightarrow 22; 25; 321$ ✓

$m = 3 \Rightarrow 23; 36; 332$ ×

$m = 4 \Rightarrow 24; 47; 343$ ✓

$m = 5 \Rightarrow 25; 58; 354$ ×

$m = 6 \Rightarrow 26; 69; 365$ ✓

Luego:

$2 + 4 + 6 = 12 = 2^2 \times 3$

$\Rightarrow C.D. = 3 \times 2 = 6$

Clave C

30. $\overline{abc} = 12(a + b + c + 1)$

$100a + 10b + c = 12a + 12b + 12c + 12$

$88a = 11c + 2b + 12$ ... (1)

Luego:

$11(8a - c) = 2(b + 6)$

$\overset{\circ}{11} = b + 6$

$\Rightarrow b = 5$

Reemplazando $b = 5$ en (1).

$88a = 11c + 10 + 12$

$8a = c + 2$

$\overset{\circ}{8} = c + 2$

$\Rightarrow c = 6$

Luego: $a = 1$

Ahora: $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 5^2 + 6^2 = 62$

Piden: $SD(62) = (1 + 2) \times (1 + 31) = 96$

Clave B

31. Si $N = A^a \times B^b \times C^c$

$\dfrac{N}{A} = A^{a-1} \times B^b \times C^c$

$\dfrac{N}{B} = A^a \times B^{b-1} \times C^c$

$\dfrac{N}{C} = A^a \times B^b \times C^{c-1}$

Del dato:

- $a(b + 1)(c + 1) = (a + 1)(b + 1)(c + 1) - 42$

  $\Rightarrow (c + 1)(b + 1) = 42$

- $(a + b)\, b\, (c + 1) = (a + 1)(b + 1)(c + 1) - 35$

  $\Rightarrow (a + 1)(c + 1) = 35$

- $(a + 1)(b + 1)c = (a + 1)(b + 1)(c + 1) - 30$

  $\Rightarrow (a + 1)(b + 1) = 30$

  $a = 4; b = 5; c = 6$

  $a + b + c = 15$

Clave A

32. $\overline{ab0ab} = \overline{ab} \times 10^3 + \overline{ab}$

$1001\overline{ab} = \underbrace{7 \times 11 \times 13 \times \overline{ab}}_{D.C.}$

- Si $\overline{ab} \neq 13 \wedge \overline{ab} \neq 11$

  $\Rightarrow CD = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16$

- Si $\overline{ab} = 11$

  $\Rightarrow CD = (1 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 12$

- Si $\overline{ab} = 13$

  $\Rightarrow CD = (1 + 1)(1 + 1)(2 + 1) = 12$

$\therefore$ Como mínimo tiene 12 divisores

Clave C

33. $\overline{ab(2a)(2b)} = 102 . \overline{ab}$

$\overline{ab(2a)(2b)} = 2 . 3 . 17 . \overline{ab}$

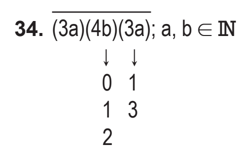
$CD = 30 = 2 . 3 . 5 = (1 + 1)(2 + 1)(4 + 1)$

Se deduce que: $\overline{ab} = 2^3 . 3 = 24$

$a = 2; b = 4$

$\therefore a + b = 6$

Clave C



34. $\overline{(3a)(4b)(3a)}$; a, b ∈ ℕ

a: 0, 1, 2 ; b: 1, 3

- a no puede ser 2 porque sería un número par y por lo tanto no sería primo

- Posibles valores:

303 ✗ 909 ✗
343 ✗ 949 ✗
Primo → 383 ✓ 989 ✗

∴ Solo hay un número primo de la forma $\overline{(3a)(4b)(3a)}$.

Clave A

35. $18^{10} - 18^8 = 18^8(18^2 - 1) = 18^8 . 323$

$= (3^2 \times 2)^8 \times 17 \times 19 = 3^{16} \times 2^8 \times 17 \times 19$

$CD = (16 + 1)(8 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 612$

Clave C

36. $N = 2^3 \times p^2 \times q$

$\Rightarrow \left(\dfrac{2^4 - 1}{2 - 1}\right)(p^2 + p + 1)(q + 1)$

$= \dfrac{93}{35} \times 8 \times p^2 \times q$

$5(p^2 + p + 1)(q + 1) = \dfrac{31}{35} \times 8 \times p^2 \times q$

$(p^2 + p + 1)(q + 1) = \dfrac{31 \times 8 \times p^2 \times q}{175}$

Cero $(p^2 + p + 1)(q + 1) \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

$31 \times 8 \times p^2 \times q = \overset{\circ}{175}$

$\Rightarrow p^2 \times q$

Además p y q son números primos, entonces:

$p^2 \times q = 5^2 \times 7$

Luego:

$N = 2^3 \times 5^2 \times 7 = 1400$

Clave E

37. $n - 1 > 0 \Rightarrow n > 1$

$N = \overline{(n-1)(n-1)n-1)} = (n - 1) \times 3 \times 37$

1 → CD(N) = 4
2 → CD(N) = 8
3 → CD(N) = 6
4 → CD(N) = 12
5 → CD(N) = 8
6 → CD(N) = 12
7 → CD(N) = 8
8 → CD(N) = 16
9 → CD(N) = 8

n = 5; 7

Piden: 5 + 7 = 12

Clave A

38. $CD(N) = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow N = (A^a \times B^b \times C^a ...)^2 = n^2$

Luego:

$3024 < N < 3364$

$3024 < n^2 < 3364$

$54 < n < 58$

n: 55; 56; 57

$N = 56^2 = 3136$

Piden:

3 + 1 + 3 + 6 = 13

Clave B

39. $A = a^\alpha . b^\beta . c^\delta$

Donde: $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\delta + 1) = 28$
↓ ↓ ↓
1 1 6

$A = 2^6 . 3 . 5$ (menor valor de A)

$S.D. = \left(\dfrac{2^{6+1} - 1}{2 - 1}\right)\left(\dfrac{3^{1+1} - 1}{3 - 1}\right)\left(\dfrac{5^{1+1} - 1}{5 - 1}\right)$

S.D. = 3048

∴ 3048 – 11 = 3037

Clave C

40. $N = 2^4 \times 3^6 \times 7^3 \times 5^4 \times 11^2$

$N = 2^4 \times 5^4 (3^6 \times 7^3 \times 11^2)$

$N = 10^4\underbrace{(3^6 \times 7^3 \times 11^2)}_{M}$

Los divisores de M son números que terminan en 1, 3, 7, ó 9.

⇒ C.D.(M) = (6 + 1)(3 + 1)(2 + 1) = 84

∴ 84 números son divisores de N que terminan en 1, 3, 7 ó 9.

Clave E

41. $N = 2^{3n-1} \times 3^{n+1} \times 7^{2n}$

$N = 3^{3(n-1)} \times (2^2 \times 3^{n+1} \times 7^{2n})$

$N = 2^{3(n-1)} \times [2 \times (2 \times 3^{n+1} \times 7^{2n})]$

$CD_{\overset{\circ}{2}}(N) = 2 \times (n + 2) \times (2n + 1) = 70$

$\neq \overset{\circ}{8}$

$\Rightarrow n = 3$

Piden: $CD_{\overset{\circ}{49}}(N) = (8 + 1) \times (4 + 1) \times (4 + 1)$

$CD_{\overset{\circ}{49}}(N) = 225$

Clave A

42. $M = 3^{k+13} \times 7^k \times 13^4 = 21 \times (3^{k+12} \times 7^{k-1} \times 13^4)$

$CD(M) - CD_{\overset{\circ}{21}}(M) = 120$

$5(k + 14)(k + 1) - 5(k + 13)k = 120$

$(k + 14)(k + 1) - (k + 13)k = 24$

$k^2 + 15k + 14 - k^2 - 13k = 24$

$2k + 14 = 24$

$\Rightarrow k = 5$

Luego:

$M = 3^{18} \times 7^5 \times 13^4 = 7^2 \times 13 \times (3^{18} \times 7^3 \times 13^3)$

$CD_{\overset{\circ}{637}}(M) = 19 \times 4 \times 4 = 304$

Clave B

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 41) Unidad 2

Comunicación matemática

1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4. a) V
$MCD(2^5; 2^3) = 2^3 = 8$

b) V
$MCM(4; 5) = 4 \times 5 \times 1 = 4 \times 5 \times MCD(4; 5)$

c) F
$MCD(2^4 - 1; 3) = MCD(15; 3) = 3$

5. a) V
b) V
c) V

$27 = \overset{\circ}{\overline{MCD(3^{10}; 3)}}$

$27 = \overset{\circ}{3}$

Resolución de problemas

6. $A = 72^x . 750 = 2^{3x+1} . 3^{2x+1} . 5^3$

$B = 90^x . 4 = 2^{x+2} . 3^{2x} . 5^x$

$MCM(A; B) = 2^{3x+1} . 3^{2x+1} . 5^x$

$(3x + 2)(2x + 2)(x + 1) = 2944$

$(3x + 2)(x + 1)^2 = 1472 = 23 . 8^2$

$\therefore x = 7$

Clave A

7. Sabemos:
$A . B = MCD(A; B) . MCM(A; B)$

$888 = 12 . MCM(A; B)$

$\frac{888}{12} = MCM(A; B)$

$\therefore MCM(A; B) = 74$

Clave E

8. $A = 12 . 45^n = 2^2 . 3 . (3^2 . 5)^n$

$A = 2^2 . 3^{2n+1} . 5^n$

$B = 12^n . 45 = (2^2 . 3)^n . (3^2 . 5)$

$B = 2^{2n} . 3^{n+2} . 5$

$N = MCM(A; B) = 2^{2n} . 3^{2n+1} . 5^n$

$C.D.(N) = (2n + 1)(2n + 1 + 1)(n + 1)$

Por dato:

$90 = (2n + 1) . 2(n + 1)(n + 1)$

$45 = (2n + 1)(n + 1)^2$

$5 . 3^2 = (2n + 1)(n + 1)^2$

$\Rightarrow 3 = n + 1 \qquad \therefore n = 2$

Clave B

9. $N_1 = (3^2 . 5)(2^2 . 3 . 5)^n$

$N_1 = 3^2 . 5 . 2^{2n} . 3^n . 5^n$

$N_1 = 2^{2n} . 3^{n+2} . 5^{n+1}$

$N_2 = (3^2 . 5)^n . (2^2 . 3 . 5)$

$N_2 = 3^{2n} . 5^n . 2^2 . 3 . 5$

$N_2 = 2^2 . 3^{2n+1} . 5^{n+1}$

$MCM(N_1; N_2) = 2^{2n} . 3^{2n+1} . 5^{n+1}$

$MCD(N_1; N_2) = 2^2 . 3^{n+2} . 5^{n+1}$

Por dato:

$2^{2n} . 3^{2n+1} . 5^{n+1} = 12(2^2 . 3^{n+2} . 5^{n+1})$

$2^{2n} . 3^{2n+1} = 2^2 . 3 . 2^2 . 3^{n+2}$

$2^{2n-4} = 3^{2-n}$

$\Rightarrow 2n - 4 = 2 - n = 0$

$\therefore n = 2$

Clave C

10. $MCM(2n + 1; 2n + 3) = 143$
PESÍ

$\Rightarrow (2n + 1)(2n + 3) = 143$

$\Rightarrow n = 5$

$\therefore (2n + 1) + (2n + 3) = 24$

Clave A

Nivel 2 (página 41) Unidad 2

Comunicación matemática

11.

12.

Razonamiento y demostración

13. I. F
$m > n \Rightarrow MCD(A^n; A^m) = A^n$

II. F
A y B son PESÍ entonces:
$MCD(A; B) = 1$

III. V
$\overline{(5a)(2a)(2a)} = \overset{\circ}{3}$

$\Rightarrow MCD(\overline{(5a)(2a)(2a)}; 3) = 3$

Clave C

14. a) V

b) V
$MCD[B^A - 1; B^{A+1} + B - B - 1]$

$= MCD[B^A - 1; B^{A+1} - 1]$

$= B^{MCD(A; A+1)} - 1$

$= B - 1$

c) F
$MCD[k; k(A + B)] = k \times MCD[1; A + B] = k$

Resolución de problemas

15. Hallar el número de cifras:
$MCD(120^{120}; 130^{130}; 140^{120}; 150^{150})$

$MCD(A; B; C; D)$

$A = 12^{120} . 10^{120}$

$B = 13^{130} . 10^{130}$

$C = 14^{140} . 10^{140}$

$D = 15^{150} . 10^{150}$

$MCD(A; B; C; D) = 10^{120} . 2^{10}$

$\Rightarrow$ n.° cifras $= 1024\underbrace{0000 \ldots 00}_{120 \text{ cifras}}$

Por lo tanto, tiene 124 cifras.

Clave B

16. $A = 2^{n+2} . 3^{n+3} \wedge B = 2^{n-1} . 3^n$

$MCM(A; B) = 2^{n+2} . 3^{n+3}$

$C.D._{MCM(A; B)} = (n + 3)(n + 4) = 110$

$\therefore n = 7$

Clave A

17. $A = \underbrace{111...11}_{20 \text{ cifras}}{}_{(2)}$

$B = \underbrace{77...77}_{10 \text{ cifras}}{}_{(8)}$

$A = 2^{20} - 1$

$B = 8^{10} - 1 = 2^{30} - 1$

$MCD(A; B) = 2^{M.C.D.(20;30)} - 1$

$= 2^{10} - 1 = 1023$

Clave E

18. Dato:
$MCD(N; 2205) = 245 \begin{cases} N = 245 . C \\ 2205 = 245 . 9 \end{cases}$

De donde: C es PESÍ con 9 $\Rightarrow C \neq \overset{\circ}{3}$

Además: $D_N = 10$ ...(1)

$N = 5 . 7^2 . C$ ...(2)

De (1) y (2): $C = 7^2 \Rightarrow N = 5 . 7^4 = 12\,005$

El número es 12 005.

Clave B

19. $MCD(5 . 2A; 5 . 3B) = 625$

$5MCD(2A; 3B) = 625$

$MCD(2A; 3B) = 125$ ...(1)

$MCM(7 . 2A; 7 . 3B) = 31\,500$

$7MCM(2A; 3B) = 31\,500$

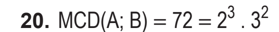
$MCM(2A; 3B) = 4500$ ...(2)

Luego:
$2A . 3B = MCD(2A; 3B)MCM(2A; 3B)$

$6A . B = 125 . 4500$

$\therefore A . B = 93\,750$

Clave B



20. $MCD(A; B) = 72 = 2^3 \,.\, 3^2$

$\Rightarrow A = 2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 2^7 = 2^{10} \,.\, 3^2$

$\Rightarrow$ C.D. $= 33 = (2 + 1)(10 + 1) = 3 \times 11$

$\Rightarrow B = 2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 3^4 = 2^3 .\, 3^6$

$\Rightarrow$ C.D. $= 28 = (3 + 1)(6 + 1) = 4 \times 7$

$\Rightarrow MCM(A; B) = 2^{10} \,.\, 3^6$

$\therefore$ C.D. $= 11 \times 7 = 77$

Clave C

Nivel 3 (página 42) Unidad 2

Comunicación matemática

21. Para A:

1 vuelta <> 2π rad

$\frac{1}{8}$ vuelta <> $\frac{\pi}{4}$ rad <> 1 segundo

1 vuelta <> 8 segundos

Para B:

$\frac{1}{4}$ vuelta <> $\frac{\pi}{2}$ rad <> 1 segundo

1 vuelta <> 4 segundos

Si comienzan a girar, volverán a estar en la misma posición después de:

MCM(4; 8) = 8 segundos (por 1.ª vez)

a) 8 s

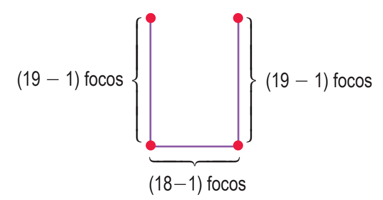
b) n.° de vueltas de A: 1

n.° de vueltas de B: 2

22. Sea d la mayor distancia entre dos focos, entonces:

d = MCD(360; 400; 380) = 20

Entonces en la 1.ª letra:

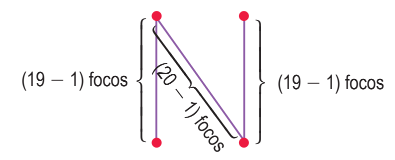


Se usan:

$(19 - 1) + (18 - 1) + (19 - 1) + 4$

$= 54$ focos

En la 2.ª letra:



Se usan:

$(19 - 1) + (20 - 1) + (19 - 1) + 4$

$= 59$ focos

En la 3.ª letra:

(19 − 1) focos

Se usan: $(19 - 1) + 2 = 20$ focos

El total de focos a usar es:
$54 + 59 + 20 = 133$

a) 20 cm

b) 133 focos

Razonamiento y demostración

23. a) F

$A = \overset{\circ}{B} \Rightarrow A = Bk;\ k \in \mathbb{Z}^+$

$MCD(Bk + B; Bk + 2B)$

$= MCD[B(k + 1); B(k + 2)] = B$

b) V

$MCD(12^m - 1; 12^n - 1) = 12^{MCD(m;\, n)} - 1$

$= 12^n - 1$

c) V

$p^2 + q = 7$

$\downarrow \quad \downarrow$

$2^2 \quad 3$ (son primos diferentes)

$3^2 \quad 2$

$\Rightarrow MCM(A; B) = 8 \times 2 \times 3$ (p y q son PESÍ)

$\downarrow \ \downarrow \ \downarrow$

$d \ \ p \ \ q$

$\Rightarrow A + B = 16 + 24 = 40$

24. I. (F)

Para A = 4; B = 6 se tiene:

$MCD(4; 6) = 2$

$MCD(4^3; 6^3) = MCD(64; 216) = 8$

Luego:

$MCD(4^3; 6^3) > MCD(4; 6)$

II. (V)

Sea la división entera inexacta:

$D = dq + r$

Sean:

$MCD(D; d) = n$ ... (I)

$MCD(r; d) = m$ ... (II)

En (I):

$D = np_1 \wedge d = np_2$ (p_1 y p_2 son PESÍ)

$dq + r = np_1$

$r = np_1 - dq$

$r = np_1 - np_2q$

$r = n(p_1 - p_2q)$

$\Rightarrow r = \overset{\circ}{n} \wedge d = \overset{\circ}{n}$

Como m = MCD(r; d), se cumple: $\overset{\circ}{n} = m$

En (II):

$r = mq_1 \wedge d = mq_2$ (q_1 y q_2 son PESÍ)

$D - dq = mq_1$

$D = mq_1 + dq$

$D = mq_1 + mq_2q$

$D = m(q_1 + q_2q)$

$\Rightarrow D = \overset{\circ}{m} \wedge d = \overset{\circ}{m}$

Como n = MCD(D; d), se cumple: $\overset{\circ}{m} = n$

Luego, se tiene:

$\overset{\circ}{n} = m \ \wedge \ \overset{\circ}{m} = n \Rightarrow n = m$

$\therefore$ Si $D = dq + r,\ d \in \mathbb{Z}^+;\ D, q, r \in \mathbb{Z}$,

entonces MCD(D; d) = MCD(d; r).

III. (F)

Veamos si: a = 4 y b = 2

$MCD(4 + 2; 4) = MCD(4 - 2; 2) = 2$

Pero: $MCD(a; b) = MCD(4;2) = 2 \neq 1$

Clave C

Resolución de problemas

25. $A + B = 208$

	3	1	3	3
A	B	r_1	r_2	r_3
	r_1	r_2	r_3	0

Por exceso: $r_1 = 3 \times r_2 - r_3$

$\Rightarrow r_2 = 3r_3$

$\Rightarrow r_1 = 8r_3$

$B = r_1 + r_2 = 8r_3 + 3r_3 = 11r_3$

$A = 3B + r_1 = 41r_3$

$\Rightarrow 11r_3 + 41r_3 = 208 \Rightarrow r_3 = 4$

$\therefore MCD(A; B) = 4$

Clave D

26. $A = 12 \,.\, 45^n$

$= 2^2 \,.\, 3^{2n+1} \,.\, 5^n$

$B = 45 \,.\, 12^n$

$= 2^{2n} \,.\, 3^{n+2} \,.\, 5$

$\Rightarrow MCM(A; B) = 2^{2n} \,.\, 3^{2n+1} \,.\, 5^n$

$2187 = 3^7$

$6561 = 3^8$

$\Rightarrow 7 \leq 2n + 1 < 8$

$n = 3$

Clave B

27. $A^3 + B^2 = 3185$ ...(1)

$MCD(A; B) = D$

$D + A = 21$ ...(2)

Por propiedad:

$A = Dq_1 \wedge \quad B = Dq_2$ ...(3)

(3) en (2): $D(1 + q_1) = 21 = 3 \,.\, 7$

$\Rightarrow D = 7 \ \wedge \ q_1 = 2$ ...(4)

(4) en (1): $D^3q^3{}_1 + D^2q^2{}_2 = 3185$

$7^3 \,.\, 2^3 + 7^2 \,.\, q^2{}_2 = 3185$

$\Rightarrow q_2 = 3$

$\therefore B = 21$

Clave D

28. $\overline{(a+1)bcd} = A$; $\overline{aa(a+6)(a+6)} = B$

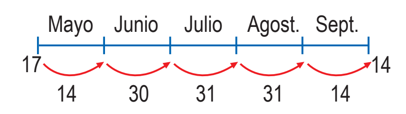
	1	1	2	3
A	B	5d	3d	d
	5d	3d	d	0

B = 8d
A = 13d
$\Rightarrow 8d = \overline{aa(a+6)(a+6)}$
↓ ↓
286 2

$\Rightarrow$ A = 286 . 13 = 3718
Suma de cifras = 19

Clave D

29. Del enunciado:
Irene: 24 días
Rosmery: 15 días
Se encuentran con Margarita: 17 de mayo
Se encontrarán la próxima vez:
MCM(24; 15) = 3 . 5 . 8 = 120



$\therefore$ La próxima vez se encontrarán el 14 de septiembre.

Clave C

30. L L L L

B = 851

$A = 1288 = 2^3 . 7 . 23$
B = 851 = 23 . 37
MCD(A; B) = 23
$\Rightarrow$ Cada lado de una parcela mide 23 m.

$$\text{n.° parcelas} = \frac{\text{Área total}}{\text{Área de cada lote}}$$
$$= \frac{1288 . 851}{23 . 23} = 2072 \text{ parcelas}$$

$$\text{n.° de postes} = \left(\frac{1288}{23}+1\right)\left(\frac{851}{23}+1\right) = 2166$$

n.° parcelas: 2072
n.° de postes: 2166

Clave A

31. $\text{M.C.M.}(\overline{abc}; \overline{(a+1)(b+2)(c+3)}) = 1148$
Sabemos: M.C.M.(A; B) = d. p . q
Donde: A = dp; B = dq

Reemplazamos:
$\text{M.C.M.(dp; dq)} = \underbrace{1148}_{d\,.\,p\,.\,q}$

Del dato, tenemos:
B – A = 123
d(q – p) = 123 = 41 . 3
d . p . q = 1148 = 41 . 4 . 7

$\Rightarrow$ d = 41 ; p = 4 ; q = 7
$\overline{abc}$ = 41 . 4 = 164
$\therefore$ a + b + c = 1 + 6 + 4 = 11

Clave A

32. Si N es el mayor número, por dato:
M.C.D.(N; 2976) = 248
2976 = 248 . 12
N = 248 . C
$\Rightarrow$ C PESÍ con 12
$C \neq \overset{\circ}{2}$ y $\neq \overset{\circ}{3}$ ... (1)

También:
M.C.M.(N; 2976) = 248 . 12 . C
Pero: 59 200 < M.C.M.(N; 2976) < 89 500

Reemplazando:
59 200 < 248 . 12 . C < 89 500
19,8 < C < 30,1 ... (2)

De (1) y (2): $C \in$ {23; 25; 29}
El mayor número puede tomar 3 valores.

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 46) Unidad 2

Comunicación matemática

1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4. a) V

$$\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{27\times(0,5)}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{27\times\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{3}{27}} = \frac{1}{3}$$

b) F

$$f = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\div\frac{12}{24} = \frac{5}{6}\times\frac{24}{12} = \frac{5}{3}$$

c) V

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \text{ es irreducible}$$

5. a) F

$$f = \frac{1+2+3+4}{1+2+3+4+5} = \frac{10}{15}$$

⇒ Fracción propia

b) V

$$f = \frac{2\times3\times4\times5\times6}{5\times6\times7\times8} = \frac{3}{7}$$

⇒ Fracción irreductible

c) V

$$\sqrt{0,1+0,2+0,3+0,4} = \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{N}$$

Resolución de problemas

6. $0,750 = \frac{750}{1000} = \frac{75}{100}$

$\frac{75}{100} = \frac{25\,.\,3}{25\,.\,4} = \frac{3}{4}$

$\therefore\ 0,750 = \frac{3}{4}$

Clave C

7. $0,\widehat{45} = \frac{45}{99} = \frac{9\,.\,5}{9\,.\,11} = \frac{5}{11}$

$0,\widehat{45} = \frac{5}{11}$

Clave B

8. $R = \sqrt{36\,.\,(0,\widehat{38}) + 8\,.\,(0,25)}$

$R = \sqrt{36\,.\left(\frac{38-3}{90}\right) + 8\,.\left(\frac{25}{100}\right)}$

$R = \sqrt{\frac{9\,.\,4\,.\,7\,.\,5}{9\,.\,5\,.\,2} + \frac{8\,.\,5\,.\,5}{5\,.\,5\,.\,4}}$

$R = \sqrt{14+2} = \sqrt{16}$

$\therefore\ R = 4$

Clave A

9. $A = \sqrt{12\,.\,(5,8\hat{3}) + 20\,.\,(0,5) + 1}$

$A = \sqrt{12\,.\left(5+\frac{83-8}{90}\right) + 20\,.\,\frac{5}{10} + 1}$

$A = \sqrt{12\,.\left(5+\frac{75}{90}\right) + 10 + 1}$

$A = \sqrt{12\,.\,\frac{35}{6} + 11} = \sqrt{70+11} = \sqrt{81}$

$\therefore\ A = 9$

Clave D

10. $0,22... = 0,\hat{2} = \frac{2}{9}$

$0,8181... = 0,\widehat{81} = \frac{81}{99}$

Luego:

$\frac{81}{99}\times\frac{2}{9} = \frac{2}{11} = \frac{18}{99}$

$\therefore 0,\widehat{18}$

Clave C

Nivel 2 (página 47) Unidad 2

Comunicación matemática

11.

12.

Razonamiento y demostración

13. a) V

MCD (6m; 6n) = 6 ⇒ MCD (m; n) = 1
m y n son PESÍ

Luego, f es irreductible $\frac{m}{n} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$

$\therefore\ m + n = 3 + 5 = 8$

b) V

$f = \frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z}^+ \wedge a \neq \overset{\circ}{b}$

$\Rightarrow \sqrt{f^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a}{b} = f$

c) F

Si $f = \frac{1}{2}$ entonces $f^{-1} = 2$

no es una fracción.

14. I. F

Si $a, b \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

$a + b = 1$

No se puede dar este caso ya que $a > 0$ y $b > 0$

II. F

$a + b = 2 \Rightarrow a = 1 \wedge b = 1$

$\Rightarrow f = \frac{1}{1}$

No se puede dar este caso ya que f es una fracción.

III. V

$a + b = 3$

Para que f sea una fracción

$a = 1$ y $b = 2$

Clave C

Resolución de problemas

15. Como:

$a = 0,\hat{3};\ b = 0,0\hat{3} \wedge c = 0,0\hat{3}$

$a = \frac{3}{9};\ b = \frac{3}{90};\ c = \frac{3}{90}$

$a + b + c = \frac{30+3+3}{90} = \frac{36}{90}$

$\therefore\ \frac{1}{a+b+c} = \frac{90}{36} = \frac{5}{2}$

Clave B

16. $E = \frac{0,\hat{1} + 0,\hat{2} + 0,\hat{3} + ... + 0,\hat{6}}{0,1 + 0,2 + 0,3 + ... + 0,6}$

$E = \frac{\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + ... + \frac{6}{9}}{\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + ... + \frac{6}{10}}$

$E = \frac{\frac{3\times7}{9}}{\frac{3\times7}{10}} = \frac{10}{9} = 1,\hat{1}$

Clave E

17. $\frac{1}{27} = 0,\widehat{037}$: 3 cifras periódicas

$\frac{13}{11} = 1,\widehat{18}$: 2 cifras periódicas

$\frac{4}{37} = 0,\widehat{108}$: 3 cifras periódicas

$\frac{7}{9} = 0,\hat{7}$: 1 cifra periódica

Piden:

$3 + 2 + 3 + 1 = 9$

Clave E

18. Fracción irreductible: $\frac{a}{30}$; a y 30 son PESÍ

$\frac{1}{3} < \frac{a}{30} < \frac{4}{5}$

$10 < a < 24$

Valores que toma a = {11; 13; 17; 19; 23}
Existen 5 fracciones.

Clave C

19. Fracción impropia: $a > b$

$\frac{a}{b} = \frac{n+1}{n} \Rightarrow \frac{n+1}{n} + 2 = \frac{n+1+12}{n}$

$n + 1 + 2n = n + 13$

$2n = 12$

$n = 6$

$\therefore\ n + n + 1 = 2n + 1 = 13$

Clave C

20. $0,0\widehat{0a} + 0,0\widehat{0b} + 0,0\widehat{0c} = (0,1\widehat{6})^2$

$$\frac{a}{900} + \frac{b}{900} + \frac{c}{900} = \left(\frac{16-1}{90}\right)^2$$

$$\frac{a+b+c}{900} = \frac{15^2}{90 \times 90}$$

$$a+b+c = \frac{15^2 \cdot 900}{90 \times 90}$$

$\therefore a+b+c = 25$

Clave A

Nivel 3 (página 47) Unidad 2

Comunicación matemática

21. Área $= \left(\dfrac{1,5+3,8}{2}\right) \times 1,73 = 4,5845$

Clave A

22.

Razonamiento y demostración

23. I. F

$3x^2 - 2x + 2 = 3x$

$3x^2 - 5x + 2 = 0$

$3 \quad -2$

$1 \quad -1$

$(3x-2)(x-1) = 0$

$CS = \left\{1; \dfrac{2}{3}\right\}$

1 no es un número fraccionario

II. V

$MCM(a+b; a) = a(a+b)$

$\Rightarrow$ $MCD\ (a+b; a) = 1$

Luego $a+b$ y a son PESÍ.

$\Rightarrow \dfrac{a}{a+b}$ es una fracción irreductible

III. F

Si $n = -\dfrac{2}{3}$, se tiene:

$$\sqrt{\frac{(-2)^2}{3^2}} = \frac{\sqrt{(-2)^2}}{3^2} = \frac{2}{3}$$

24. I. F

$f_1 = \dfrac{1}{2}; f_2 = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow f_1 + f_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1 \notin F$

II. V

$F = \dfrac{a}{b}$

$$\Rightarrow (f^3+1)^{-1} = \left(\frac{a^3+b^3}{b^3}\right)^{-1}$$

$$= \frac{b^3}{a^3+b^3} \text{ fracción propia}$$

III. F

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \notin F$

Clave B

Resolución de problemas

25. $A = \left(1+\dfrac{1}{2}\right) \times \left(1+\dfrac{1}{3}\right) \times \ldots \times \left(1+\dfrac{1}{100}\right)$

$A = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{4}{3} \times \dfrac{5}{4} \times \ldots \times \dfrac{101}{100}$

$\therefore A = \dfrac{101}{2}$

Clave B

26. $x_1 = 30 = 5 \cdot 6$

$x_2 = 42 = 6 \cdot 7$

$x_3 = 56 = 7 \cdot 8$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_m} = 0,15$$

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \ldots + \frac{1}{x_m} = \frac{15}{100}$$

$$\frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \ldots + \frac{1}{x_m} = \frac{15}{100}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{m+4} - \frac{1}{m+5} = \frac{15}{100}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{m+5} = \frac{15}{100}$$

$$\frac{m+5-5}{5(m+5)} = \frac{15}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{m+5} = \frac{15}{20}$$

$\therefore m = 15$

Clave A

27. Hasta el mes pasado el sueldo de ella era:

$\dfrac{5}{2}(1500) \Rightarrow S/.3750$

Ahora su sueldo es: $\dfrac{5}{2}(S/.1900) \Rightarrow S/.4750$

El aumento es: $4750 - 3750$

$\therefore$ S/.1000

Clave B

28. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{7k}{11k}$

$\Rightarrow \dfrac{7k+28}{33k} = \dfrac{7}{11}$

$77k + 308 = 231k$

$154k = 308$

$k = 2$

El numerador: $7k = 14$

Clave D

29. $\dfrac{a}{b} = 0,72$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{72}{100} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{18k}{25k}$

Por dato:

$a + b = 860$

$\downarrow \quad \downarrow$

$18k + 25k = 860$

$43k = 860$

$k = 20$

Reemplazando: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{360}{500}$

Clave D

30. Sea 48m la cantidad de ácido al inicio.
Cuando se extrae un cuarto:

Ácido 36m
H_2O 12m

Luego:
queda de ácido: 9m
H_2O: 4m + 19m

La relación final será: $\dfrac{9m}{23m} = \dfrac{9}{23}$

Clave D

31. Queda: m
Tomé: x

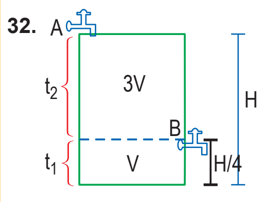
Dato: $\dfrac{m}{2} = \dfrac{x}{3} \Rightarrow x = 3k \wedge m = 2k$

Total = 5k

Piden: $\dfrac{\frac{m}{4}+x}{\text{total}} = \dfrac{\frac{2k}{4}+3k}{5k} = \dfrac{\frac{7k}{2}}{5k} = \dfrac{7}{10}$

Clave D

32.



t_1: tiempo que llena el caño A

$t_1 = \dfrac{V}{4V}(20\ h) = 5\ h$

t_2: tiempo que los dos funcionan (A y B)

A: 4V en 20 h — B: 3V en 30 h

V en 5 h — V en 10 h

Entonces:

$$\frac{V}{5} - \frac{V}{10} = \frac{3V}{t_2}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{t_2}$$

$$\frac{5}{50} = \frac{3}{t_2}$$

$t_2 = 30$ h

El tiempo empleado en llenar todo será:

$t_1 + t_2 = 5\ h + 30\ h = 35\ h$

Clave C

MARATÓN MATEMÁTICA (página 49)

1. $CD(2^8) = 8 + 1 = 9$

Los 7 primeros múltiplos positivos de 9:
{9; 18; 27; 36; 45; 54; 63}

Σ de los 7 primeros $\overset{\circ}{9}$ positivos:

$9 + 18 + 27 + 36 + 45 + 54 + 63$

$9(1 + 2 + 3 + \ldots + 7)$

$9 \times \dfrac{7(8)}{2} = 252$

Clave A

2. $(3^5)^2 \times 3 = 243^2 \times 3 = (\overset{\circ}{11}+1)^2 \times 3 = \overset{\circ}{11} + 3$

$(4^5)^5 \times 4 = 1024^5 \times 4 = (\overset{\circ}{11}+1)^5 \times 4 = \overset{\circ}{11} + 4$

$(\overset{\circ}{11} - 3)(\overset{\circ}{11} + 4) = \overset{\circ}{11} - 3n$

$\overset{\circ}{11} + (-3)(4) = \overset{\circ}{11} - 3n$

$\overset{\circ}{11} - 12 = \overset{\circ}{11} - 3n$

$\Rightarrow \quad 3n = 12$

$\therefore \quad n = 4$

Clave D

3. Sea: $\overline{abc}$

Dato:

$\overline{2bc} = \overset{\circ}{15}$

$210 = 15 \times 14$

$225 = 15 \times 15$

$240 = 15 \times 16$

$\vdots \qquad \vdots$

$285 = 15 \times 19$

$\therefore$ Hay 6 números.

Clave A

4. $N = \underbrace{6000\ldots000}_{n \text{ ceros}}$

$N = 6 \times 10^n$

$N = 2 \times 3 \times 10^n$

$N = 2^{n+1} \times 3 \times 5^n$

$CD(N) = 176 + 3 + 1 = 180$

$CD(N) = (n+2)(1+1)(n+1) = 180$

$(n+2)(n+1) = 90$

$(n+2)(n+1) = 9 \times 10$

$\Rightarrow n = 8$

Luego:

$N = 2^9 \times (3 \times 5^8)$

$\therefore C.D.(N)_{Imp.} = (1+1)(8+1) = 18$

Clave A

5. $A = 175 \,.\, 245^n$

$A = 5^2 \,.\, 7 \,.\, (5 \,.\, 7^2)^n = 5^2 \,.\, 7 \,.\, 5^n \,.\, 7^{2n}$

$A = 5^{n+2} \,.\, 7^{2n+1}$

$\Rightarrow C.\,D._A = (n+2+1)(2n+1+1)$

$A = 35(5^{n+1} \,.\, 7^{2n})$

$\Rightarrow C.\,D._{\overset{\circ}{35}} = (n+1+1)(2n+1)$

$C.\,D._{\neq \overset{\circ}{35}} = C.\,D._A - C.\,D._{\overset{\circ}{35}}$

$28 = (n+3)(2n+2) - (n+2)(2n+1)$

$\Rightarrow 3n + 4 = 28$

$\therefore \quad n = 8$

Clave B

6. $N = 2^a \,.\, 3^b$

$CD_N = (a+1)(b+1)$

$8N = 2^{a+3} \,.\, 3^b$

$CD_{8N} = (a+4)(b+1) = (a+1)(b+1) + 9 \quad \ldots(1)$

$9N = 2^a \,.\, 3^{b+2}$

$CD_{9N} = (a+1)(b+3) = (a+1)(b+1) + 10 \quad \ldots(2)$

Restamos (1) de (2):

$\Rightarrow \quad 2a - 3b = 2 \quad \wedge \quad a > b$

Cumple para: $a = 4 \wedge b = 2$

$\therefore \quad N = 2^4 \,.\, 3^2 = 144$

Clave A

7. Sean A y B primos entre sí.

Datos:

$A - B = 7 \quad \ldots(1)$

$M.C.M.(A; B) = 330 \quad \ldots(2)$

Sea: $A = d \,.\, a \wedge B = d \,.\, b$

De (1):

$\Rightarrow d(a - b) = 7$

De (2):

$d \,.\, a \,.\, b = 330 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 11$

$\downarrow$

1

$a \,.\, b = 22 \,.\, 15$

$\Rightarrow A = d \,.\, a = 22 \;\wedge\; B = d \,.\, b = 15$

Clave D

8. $M.C.D.(N; 320) = 40$

$0 < \log\sqrt{N} - 1 < \log 3$

$2 < \log N < \log 9 + 2$

$\log 100 < \log N < \log 900$

$100 < N < 900$

$N - 320 \mid 40$

$\frac{N}{40} - 8$

$k = \frac{N}{40}$ y 8 son PESÍ

$k = 3 \Rightarrow N = 120$

$k = 5 \Rightarrow N = 200$

$k = 7 \Rightarrow N = 280$

$k = 9 \Rightarrow N = 360$

$k = 11 \Rightarrow N = 440$

$k = 13 \Rightarrow N = 520$

$k = 15 \Rightarrow N = 600$

$k = 17 \Rightarrow N = 680$

$k = 19 \Rightarrow N = 760$

$k = 21 \Rightarrow N = 840$

Por lo tanto:

N toma 10 valores.

Clave C

9. $MCD(117A; 312B) = 390$

$39 \times MCD(3A; 8B) = 390$

$MCD(3A; 8B) = 10$

Luego:

$5 \times MCD(3A; 8B) = 50$

$MCD(15A; 40B) = 50$

Clave D

10. $x + \frac{4}{9} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{6}{11} \times \frac{4}{9} \times 7$

$x + \frac{4}{9} = \frac{4 \times 20}{99}$

$\frac{9x+4}{9} = \frac{80}{99}$

$9x + 4 = \frac{80}{11}$

$9x = \frac{36}{11} \quad \therefore x = \frac{4}{11}$

Clave A

11. Resuelve — No resuelve

$\frac{1}{3}x \qquad x$

$\text{Total} = \frac{1}{3}x + x = \frac{4x}{3}$

Piden:

$\frac{\text{Resuelto}}{\text{Total}} = \frac{\frac{1}{3}x}{\frac{4}{3}x} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Clave B

12. $\frac{14}{\overline{ab}} = 0,\widehat{abc}$

$\frac{14}{\overline{ab}} = \frac{\overline{abc}}{999}$

$14 \times 999 = \overline{abc} \times \overline{ab}$

$378 \times 37 = \overline{abc} \times \overline{ab}$

$\overline{abc} = 378, \quad \overline{ab} = 37$

$\therefore a + b + c = 18$

Clave B

13. $x = \overset{\circ}{5} + r;\;\; r\text{: } 1; 2; 3; 4$

Se tiene:

$1^4 = \overset{\circ}{5} + 1$

$2^4 = 16 = \overset{\circ}{5} + 1$

$3^4 = 81 = \overset{\circ}{5} + 1$

$4^4 = 256 = \overset{\circ}{5} + 1$

Luego: $r^4 = \overset{\circ}{5} + 1;\; r \in \{1; 2; 3; 4\}$

Entonces: $x^4 - 20\,136 = (\overset{\circ}{5} + 1) - (\overset{\circ}{5} + 1) = \overset{\circ}{5}$

Clave A

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN EN $\mathbb{Z}^+$

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 54) Unidad 3

Comunicación matemática

1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4. a) F

$\overline{p5}^2 = \overline{abcd}$

$...25 = \overline{abcd}$

$c + d = 2 + 5 = 7$

b) V

$N = \overline{a(a+2)(a+1)} = \overset{\circ}{3}$

$\Rightarrow N = \overset{\circ}{9}$

c) F

$4^3 = 64$

$5^3 = 125$

$6^3 = 216$

$\Rightarrow \overline{1ab} = 125$

$a + b = 2 + 5 = 7$

5. I. V

Como N es un cuadrado perfecto, entonces:

$\alpha = \overset{\circ}{2} \wedge \beta = \overset{\circ}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = \overset{\circ}{2}$

II. F

Como N es un cuadrado perfecto y p = 0, entonces:

$N \begin{cases} \overset{\circ}{2} \\ \overset{\circ}{5} \end{cases} \Rightarrow a = 2 \wedge b = 5$

III. V

$N = k^2 = \overline{mn5} \Rightarrow N = \overset{\circ}{5}$

Luego:

$a = 5 \vee b = 5$

Clave C

Resolución de problemas

6. $N \,.\, 840 = k^2$

$N \,.\, 2^3 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 7 = k^2$

Los exponentes de 2; 5; 3 y 7 deben ser $\overset{\circ}{2}$ y, además, N deben ser mínimo:

$\Rightarrow N = 2 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 7 = 210$

$\Rightarrow 2^4 \,.\, 5^2 \,.\, 3^2 \,.\, 7^2 = k^2$

Suma de cifras de N = 2 + 1 = 3

Clave B

7. Sea A el número menor:

$(38\,808)A = k^2$

$2^3 \times 3^2 \times 7^2 \times 11 \times A = k^2$

$\Rightarrow A = 2 \times 11$

$\therefore A = 22$

Clave C

8. $\overline{7ab5} = K^2$

$b = 2$ y $a \in \{0; 2; 6\}$

Además: $\overline{7a} = n(n+1)$

$\Rightarrow n = 8 \Rightarrow \overline{7a} = 8 \,.\, 9 = 72$

$\Rightarrow a = 2$

$\therefore a + b = 2 + 2 = 4$

Clave B

9. $\overline{ab} = K^2$

$\overline{ab}$: {16; 25; 36; 49; 64; 81}

Por dato: a + b = 10

$\Rightarrow \overline{ab} = 64$

$K^2 = 64$

$\therefore K = 8$

Clave A

10. $3200 < k^2 < 8600$

$\sqrt{3200} < k < \sqrt{8600}$

$56{,}56... < k < 92{,}73...$

$\downarrow$

{57; 58; 59; ...; 92}

nº. de términos = 92 − 56 = 36

Por lo tanto:

Existen 36 cuadrados perfectos entre 3200 y 8600.

Clave B

Nivel 2 (página 54) Unidad 3

Comunicación matemática

11.

12.

Razonamiento y demostración

13. I. F

$CD(N) = 5 = 4 + 1$

$\Rightarrow \overline{ab} = p^4$; p es primo

$p = 2 : \overline{ab} = 16$

$p = 3 : \overline{ab} = 81$

II. F

$CD(N) = 2 = 1 + 1$

$\Rightarrow \overline{ab} = p$ (primo)

$\downarrow$

11

13

$\vdots$

97

$\overline{ab}$ es un número primo, por lo tanto no es un cuadrado prefecto.

III. V

$CD(N) = 7 = 6 + 1 \Rightarrow \overline{ab} = p^6$ (p es primo)

$p = 2$: $\overline{ab} = 64$

Luego:

$a \times b = 6 \times 4 = 24$

Clave B

14. a) F

$\sqrt{\overline{6ab}}$ | $\overset{\sqrt{6}\,\downarrow}{2...}$ $\Rightarrow \overline{6ab} = (2...)^2 + r$

b) V

Como $2^{\overline{mp}} \times 3^{\overline{p1}}$ es un cubo perfecto, entonces: $\overline{mp} = \overset{\circ}{3}$ y $\overline{p1} = \overset{\circ}{3}$

Luego:

$m + p = \overset{\circ}{3} \wedge p = \overset{\circ}{3} + 2$

$p_{máx.} = 8 \Rightarrow m_{máx.} = 7 \therefore (m + p)_{máx.} = 15$

c) F

$\overline{a(2a)b0} = k^2$

$\downarrow$

0

$\Rightarrow \overline{a(2a)} = n^2 \begin{cases} \overset{\circ}{2} \\ \overset{\circ}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{a(2a)} = \begin{cases} \overset{\circ}{4} \\ \overset{\circ}{9} \end{cases}$

Es decir: $\overline{a(2a)} = \overset{\circ}{36} = 36$

Luego: a + b = 3 + 0 = 3

Resolución de problemas

15. $\sqrt[3]{\overline{103aab}}$ | k, residuo $\overline{b3}$

$\overline{103aab} = k^3 + \overline{b3}$

$\Rightarrow k^3 = (47)^3 = 103\,823$

Pero:

$\overline{103aab} = 103\,823 + \overline{b3}$

$\Rightarrow b = 6 \wedge a = 8$

$\therefore a + b = 6 + 8 = 14$

Clave E

16. $\overline{xxx} = 37k^2$

$100x + 10x + x = 37k^2$

$111x = 37k^2$

$3x = k^2$

$\hookrightarrow 3$

Para: x = 3, k = 3

Piden: x + k = 3 + 3 = 6

Clave B

17. Sea a/b la fracción equivalente:

$\frac{5}{9} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = 5k \wedge b = 9k$

Por dato:

$\underbrace{a + b} = N^3$ (cubo perfecto)

$14k = N^3$

$2 \times 7(k) = N^3$

$\downarrow$

$(2^2 \times 7^2)$

$\frac{a}{b} = \frac{5 \,.\, 2^2 \,.\, 7^2}{9 \,.\, 2^2 \,.\, 7^2}$

Piden la diferencia:

$(9-5)(2^2 \times 7^2)$

$\downarrow$

$4 \,.\, (4 \,.\, 49) = 784$

$\therefore\; b - a = 784$

Clave B

18. $\overline{ababab}_{(5)} \times 272_{(8)} = k^2$

$(\overline{ab}_{(5)} \times 5^4 + \overline{ab}_{(5)} \times 5^2 + \overline{ab}_{(5)}) \times 186 = k^2$

$651 \times \overline{ab}_{(5)} \times 2 \times 3 \times 31 = k^2$

$3 \times 7 \times 31 \times \overline{ab}_{(5)} \times 2 \times 3 \times 31 = k^2$

$\underbrace{\overline{ab}_{(5)}}_{2 \times 7} \times 2 \times 3^2 \times 7 \times 31^2 = k^2$

$\Rightarrow\; \overline{ab}_{(5)} = 14$

$5a + b = 14$

$\downarrow \quad \downarrow$

$2 \quad 4$

$\therefore\; a + b = 6$

Clave E

19. Datos:

$\overline{abc5} \,.\, 2025 = k^2 \quad ...(1)$

$\overline{abc5} \,.\, 2025 = p^3 \quad ...(2)$

De (1):

$\underbrace{\overline{abc5}}_{p^2} \,.\, 5^2 \,.\, 3^4 = k^2$

$\overline{abc5} = p^2$

Como $\overline{abc5}$ es $\overset{\circ}{5}$ y $\overline{abc5}$ es un cuadrado perfecto:

$\overline{abc5} = 5^2 \,.\, q^2$

De (2):

$\overline{abc5} \,.\, 2025 = k^3$

$\overline{abc5} \,.\, 3^4 \,.\, 5^2 = k^3$

$5 \,.\, 3^2 \,.\, r^3$

$\overline{abc5} = 5 \,.\, 3^2 \,.\, r^3$

$25 \,.\, q^2 \qquad (5 \,.\, m)^3$

$\overline{abc5} = 5 \,.\, 3^2 \,.\, 5^3 \,.\, m^3$

$= 5^4 \,.\, 3^2 \,.\, m^3$

$= 5625m^3 \Rightarrow \overline{abc5} = 5625$

$\therefore\; a + b + c = 13$

Clave D

20. $\overline{15cd5} = (k + 25)^2$

$d = 2 \;\wedge\; c \in \{0; 2; 6\}$

Además:

$\overline{15c} = n(n+1) = 12(13)$

$\overline{15c} = 156 \;\Rightarrow\; c = 6$

$15\,625 = (k + 25)^2 \;\Rightarrow\; k = 100$

$\therefore\; \dfrac{k}{c \,.\, d - 2} = \dfrac{100}{2 \,.\, 6 - 2} = 10$

Clave A

Nivel 3 (página 55) Unidad 3

Comunicación matemática

21. Área $= 105x$; $x < 105$

Del enunciado:

$6(\text{Área}) = k^2$

$6(105x) = k^2$

$2 \times 3^2 \times 5 \times 7x = k^2$

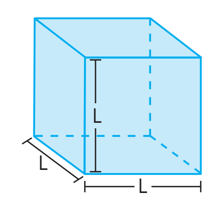
$2 \times 5 \times 7$

Luego:

$x = 2 \times 5 \times 7 = 70$ m

Clave B

22. Por dato:



$L^3 = 512$

$L = 12$ cm

Luego:

(n.° cubos) $\times 2 = 12$

n.° cubos $= 6$

Se utilizaron:

$(\text{n.° cubos})^3 = 6^3 = 216$ cubos

Clave A

Razonamiento y demostración

23. a) F

$144 = 12^2$

$169 = 13^2$

b) V

$\overline{50xyz} = k^3 + \overline{z3}$

$36^3 = 46\,656$ ✗

$37^3 = 50\,653$ ✓ $\quad\Rightarrow\; k = 37$

$38^3 = 54\,872$ ✗

$\overline{50xyz} = 50\,653 + \overline{z3} \;\Rightarrow\; z = 6$

$\overline{50xyz} = 50\,653 + 63$

$\overline{50xy6} = 50\,716$

$\therefore\; x + y = 7 + 1 = 8$

c) F

$y \neq 1$; $y \neq x$; $x \geq 2$; $x + y < 5 \Rightarrow 2 \leq x + y \leq 4$

$x + y = 2 : x = 2 \wedge y = 0$ ✓

$x + y = 3 : x = 3 \wedge y = 0$ ✗

$x + y = 4 : x = 4 \wedge y = 0$ ✗

$22\,201 = 149^2$

$\Rightarrow\; x^y = 2^0 = 1$

24. $K^3 < K^3 + r < (K+1)^3$; $K, r \in \mathbb{Z}^+$

$K^3 < K^3 + r < K^3 + 3K^2 + 3K + 1$

$0 < r < 3K^2 + 3K + 1$

$1 \leq r \leq 3K^2 + 3K$

a) $r_{mín.} = 1$

b) $r_{máx.} = 3K^2 + 3K = 3K(K+1)$

Resolución de problemas

25. $\overline{aabb} = x^2$

$a \,.\, 1000 + a \,.\, 100 + b \,.\, 10 + b = x^2$

$1100a + 11b = x^2$

$\underbrace{11(100a + b)}_{\overset{\circ}{11}} = x^2$

$100a + b = \overset{\circ}{11}$

$(\overset{\circ}{11} + 1)a + b = \overset{\circ}{11}$

$a + b = \overset{\circ}{11}$

$\therefore\; a + b = 11$

Clave D

26. $[\overline{(b+1)(a+1)a}]^2 = \overline{(a+1)ab(a+1)a}$

$a \in \{0; 1; 5; 6\}$

Analizando para $a = 6$ cumple la igualdad.

$\Rightarrow\; \overline{(b+1)76}^2 = \overline{76b76}$

$\Rightarrow\; b = 1$

$276^2 = 76\,176$

$\therefore\; a + b = 6 + 1 = 7$

Clave C

27. $\overline{a(a+1)(a+2)(3a)(a+3)}$

$a = 1; 2; 3$

Para $a = 3$ el numeral tiene una cantidad impar de divisores:

$34\,596 = 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 31^2 \Rightarrow$ C. D. $= 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 27$

$\Rightarrow\; \overline{a(2a)(3a)} = 369$

$\sqrt{369}\,\big|\,\underline{20}$

$\quad 31\,|$

$\therefore\; r_e = 31$

Clave C

28. $\overline{6abcd6} = k^3$

$600\,000 \leq k^3 < 700\,000$

$84{,}34 \leq k < 88{,}8$

$\downarrow$

$85; 86; 87; 88$

Vemos que: $k = 86$

$\Rightarrow\; k^3 = 636\,056$

$\therefore\; a + b + c + d = 3 + 6 + 0 + 5 = 14$

Clave A

29. $\overline{ab1} = k^2$; si: $a + b = 12$

$\overline{ab0} + 1 = k^2$

$\downarrow$

$\overline{ab} \,.\, 10 + 1 = k^2$

$\downarrow$

84

$\Rightarrow\; \overline{ab} = 84$

Luego: $k^2 = 29^2 \;\Rightarrow\; k = 29$

$\therefore\; \Sigma$ cifras $= 9 + 2 = 11$

Clave B

30. $\sqrt{4489} = 67$

$\sqrt{444\,889} = 667$

$\vdots \qquad \vdots$

$\sqrt{\underbrace{44...44}_{n}88...89} = \underbrace{66...6}_{n-1}7 = k$

Suma de cifras de $k = (n-1)6 + 7 = 6n + 1$

Clave E

31. $\overline{abcde} = k^2 = \overset{\circ}{13} = \overset{\circ}{7}$

$\Rightarrow k^2 = \overset{\circ}{91} \Rightarrow k = \overset{\circ}{91}$

Luego:

$\overline{abcde} = (91m)^2 = 8281m^2$

$(\overline{abcde})_{mín.} = 8281m^2$

$\qquad\qquad\qquad\downarrow$

$\qquad\qquad\qquad 2$

$\Rightarrow \overline{abcde} = 33\,124$

$\therefore \Sigma$cifras de $\overline{abcde}$ es: 13

Clave E

32. $\overline{\underbrace{4a5b}_{m^2}c\underset{0}{0}} = k^2 = \overset{\circ}{33}$

$m^2 \,.\, 100 = \overset{\circ}{33}$

$m^2 = \overset{\circ}{33} \Rightarrow m = \overset{\circ}{33} = 33p$

Como:

$\overline{4a5b} = m^2 = (33p)^2$

$\overline{4a5b} = 1089 \,.\, p^2$

$\downarrow\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$4356 \qquad\qquad 2$

$\Rightarrow a = 3 \wedge b = 6$

$\therefore a + b + c = 9$

Clave B

33. $\overline{abcd} = k^2 + x$

$\overline{abcd} = [\overline{(9-a)(9-b)(9-c)(10-d)}]^2 + x$, con $(9-a) = 0$ y $(9-b) = 0$

$\Rightarrow a = 9 \wedge b = 9$

Luego:

$\overline{99cd} = [\overline{(9-c)(10-d)}]^2 + x \qquad ...(1)$

La raíz cuadrada de $\overline{99cd}$ es mayor o igual que la raíz cuadrada de 9801.

$\sqrt{9801} \le \overline{(9-c)(10-d)}$

$99 \le \overline{(9-c)(10-d)}$

$\Rightarrow c = 0 \;\wedge\; d = 1 \quad ...(2)$

Reemplazando (2) en (1):

$9901 = 99^2 + x$

$9901 = 9801 + x$

$\therefore x = 100$

Clave A

34. $\overline{19mn} = k^2$

$1900 < \underbrace{\overline{19mn}}_{k^2} < 1999$

$43{,}58... < k < 44{,}71...$

$\Rightarrow k = 44$

Luego:

$\overline{19mn} = 44^2 = 1936$

$\Rightarrow m = 3 \;\wedge\; n = 6$

$\overline{mnxy} = p^2$

$\overline{36xy} = p^2$

$3600 \le p^2 \le 3699$

$60 \le p < 60{,}81...$

$\Rightarrow p = 60$

Clave C

35. Sea: $A = a^2$ el área del patio.

Entonces:

- $a^2 = (0{,}5)^2 n \quad ...(1)$
- $(a-1)^2 = (0{,}5)^2(n-92) \quad ...(2)$

Restando (2) de (1):

$a^2 - (a-1)^2 = (0{,}5)^2 n - (0{,}5)^2(n-92)$

$(a - a + 1)(a + a - 1) = (0{,}5)^2 92$

$2a - 1 = 23 \Rightarrow a = 12$

$\therefore A = a^2 = 144\ m^2$

Clave C

36. $\overline{abcd} = \begin{cases} K_1^2 + 2K_1 \\ K_2^3 + 3K_2(K_2+1) \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{abcd} + 1 = \begin{cases} (K_1+1)^2 \\ (K_2+1)^3 \end{cases}$

Luego: $\overline{abcd} + 1 = K^6$

$1000 \le \overline{abcd} \le 9999$

$1001 \le \overline{abcd} + 1 \le 10\,000$

$1001 \le K^6 \le 10\,000$

$3{,}16 \le K \le 4{,}64$

$\Rightarrow K = 4$

$\overline{abcd} = 4^6 - 1 = 4095$

$\therefore a + b + c + d = 4 + 0 + 9 + 5 = 18$

Clave C

37. $\overline{50ab6} = k^2 + r_{mín.}$

$\overline{50ab6} = k^2 + 1$

$\Rightarrow \overline{50ab5} = k^2$

Luego:

$\Rightarrow b = 2 \;\wedge\; \overline{50a} = n(n+1)$

$\qquad\qquad\quad \downarrow \qquad \underbrace{\qquad}$

$\qquad\qquad\quad$ par $\quad$ par

$\overline{50a} = n(n+1)$

$\downarrow \quad \downarrow$

0

2

4

6 $\quad$ 22

8

$\Rightarrow a = 6 \;\wedge\; n = 22$

$\therefore a + b = 8$

Clave C

38. $N = k^3$; $(63 = 3^2 \,.\, 7)$

$\Rightarrow N = 3 \,.\, 7^2 m^3 = 147m^3$

Luego:

$63 \,.\, 1 < \underbrace{63N}_{} < 63 \,.\, 4000$

$1 < N < 4000$

$\qquad\downarrow$

$1 < 147m^3 < 4000$

$1 \le m^3 < 27{,}2...$

$1 \le m < 3{,}007...$

$\Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$

Por lo tanto:

Existen 3 términos.

Clave B

39.
- $\overline{abc} = (k+1)^3 - 1$
- $r_d = \overset{\circ}{7} + 4$

$100 \le \overline{abc} \le 999$

$101 < (k+1)^3 \le 1000$

$3{,}64 < k \le 9$

$\Rightarrow k \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9\} \qquad ...(1)$

Además:

$r_d + r_e = 3k(k+1) + 1$

$\overset{\circ}{7} + 4 = 3k(k+1)$

$\overset{\circ}{7} - 3 = 3k(k+1)$

$\overset{\circ}{7} = 3[k(k+1) + 1]$

$\overset{\circ}{7} = k(k+1) + 1 \quad ...(2)$

$\quad\downarrow$

$\quad 2$

$\quad 4$

$\quad 9$

De (1) y (2):

$\Rightarrow k = 4 \wedge k = 9$

Si $k = 9$

$\overline{abc} = (9+1)^3 - 1 \Rightarrow \overline{abc} = 999$

Si $k = 4$

$\overline{abc} = (4+1)^3 - 1 = 124$

Por lo tanto, el mínimo valor de $\overline{abc}$ es 124.

Clave B

RAZONES Y PROPORCIONES

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 59) Unidad 3

Comunicación matemática

1. Corral A: 5 ovejas
Corral B: 7 ovejas

Piden: $\frac{5+x}{7-x} = 2 \Rightarrow x = 3$

2. $x^2 - 35x + c = 0$

Sean las raíces: x_1; x_2

Se cumple: $x_1 + x_2 = 35$

Por dato: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{2k}{3k}$

Entonces: $2k + 3k = 35$
$k = 7$

Luego: $x_1 = 2(7) = 14 \wedge x_2 = 3(7) = 21$

3. Espacio usado en C: 250 – 185 = 65 GB
Espacio usado en D: 250 – 30 = 220 GB

Piden: $\frac{65}{220} = \frac{13}{44}$

Razonamiento y demostración

4. I. V
Si a = 3:
$3b - b = 30 = \overline{cd} - \overline{ef} \Rightarrow \overline{cd} = 30 + \overline{ef}$
$d = f \wedge c = 3 + e$

II. F
Si a = 9:
$9b - b = 90 = \overline{cd} - \overline{ef} \Rightarrow \overline{cd} = \underbrace{90 + \overline{ef}}_{\text{mín. } 100}$

III. F
Si a = 1:
$1b - b = 10 = \overline{cd} - \overline{ef} \Rightarrow \overline{cd} = 10 + \overline{ef}$
$d = f \wedge c = 1 + e$

Clave A

5. I. F
Si a = d, entonces:
$c - a = a - b$ → Tercera diferencial de a y c

II. V

III. V
Como $\{b; c\} \subset \mathbb{Z}^+$: $b + c = 2$ (b ↓ 1, c ↓ 1)

Luego: $a - 1 = 1 - d$

Clave D

Resolución de problemas

6. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

$2b = 72$
$b = 36$

$a = ck^2$
$a = 36 \cdot \frac{1}{9} \cdot 3$
$a = 12$

$a = \frac{c}{9}$
$ck^2 = \frac{c}{9}$
$k = \frac{1}{3}$
$b = ck$
$36 = \frac{c}{3}$
$36 \cdot 3 = c$
$c = 108$

$\Rightarrow 108 - 12 = 96$

Clave D

7. Proporción geométrica continua:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k \Rightarrow b = 15$
$k = \frac{3}{5}$

$\frac{a}{15} = \frac{15}{c} = \frac{3}{5}$

$a = 9$
$c = 25$
$c - a = 25 - 9 = 16$

Clave B

8. P. geométrica continua:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k = 7 \Rightarrow a = ck^2 \wedge b = ck$

$ck^2 + c = 75$
$ck^2 - c = 21$

$2ck^2 = 96$
$ck^2 = 48$

$48 + c = 75 \Rightarrow c = 27$

$27 \cdot k^2 = 48 \Rightarrow k = \frac{4}{3}$

$b = ck = 27 \cdot \frac{4}{3}$ $\therefore b = 36$

Clave D

9. $\frac{81}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{256} = k$

$\frac{81 \cdot x \cdot y \cdot z}{x \cdot y \cdot z \cdot 256} = k^4 \Rightarrow k^4 = \frac{81}{256}$

$\Rightarrow k = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow x = \frac{81}{k} = \frac{81}{3} \cdot 4 = 108$

$\wedge \quad y = \frac{x}{k} = \frac{108}{3} \cdot 4 = 144$

$\wedge \quad z = 256 \cdot \frac{3}{4} = 192$

$\therefore x + y + z = 108 + 144 + 192 = 444$

Clave D

10. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

$a + b + c + d = 700$

$\Rightarrow a = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot d;\ c = \frac{3}{4} \cdot d;\ b = \left(\frac{3}{4}\right)^2 d$

$\Rightarrow d\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right) + 1\right) = 700$

$d\left(\frac{175}{64}\right) = 700$

$d = 256$

$a = \frac{27}{64} \cdot 256 = 108$

$b = \frac{9}{16} \cdot 256 = 144$

$c = \frac{3}{4} \cdot 256 = 192$

$\therefore b + c = 144 + 192 = 336$

Clave D

Nivel 2 (página 59) Unidad 3

Comunicación matemática

11. a) $\frac{4}{\boxed{12}} = \frac{\boxed{12}}{36}$

b) $21 - \boxed{16} = \boxed{16} - 11$

c) $\frac{2^{2n}}{\boxed{2^{n+2m}}} = \frac{\boxed{2^{n+2m}}}{2^{4m}}$

d) $22 - 15 = \boxed{15} - \boxed{8}$

12. a) $\frac{\boxed{2}}{\boxed{4}} = \frac{\boxed{4}}{\boxed{8}} = \frac{\boxed{8}}{\boxed{16}} = \frac{16}{32}$

b) $\frac{81}{\boxed{54}} = \frac{\boxed{54}}{\boxed{36}} = \frac{\boxed{36}}{\boxed{24}} = \frac{\boxed{24}}{16}$

Razonamiento y demostración

13. I. V
Como c = d, entonces:

$\frac{a}{b} = \frac{a+c+2}{b+c+1}$

$ab + ac + a = ba + bc + 2b$
$a(c+1) = b(c+2)$
$\frac{a}{b} = \frac{c+2}{c+1}$

Además: 1 < 2
$1 + c < 2 + c,\ c \in \mathbb{Z}^+$
$1 < \frac{2+c}{1+c} \Rightarrow 1 < \frac{a}{b} \Rightarrow b < a$

II. F
Si b = 2a, entonces:

$\frac{1}{2} = \frac{a+c+2}{2a+d+1}$

$2a + d + 1 = 2a + 2c + 4$

$\frac{d}{2c} = 3$

$\frac{d}{c} = 6$

III. V
Si b = 3a = 3, entonces:

$\frac{1}{3} = \frac{1+c+2}{3+d+1}$

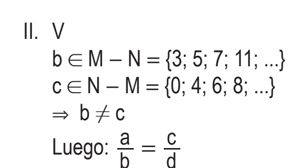
$\frac{1}{3} = \frac{3+c}{4+d}$

$4 + d = 9 + 3c$
$d - 3c = 5$

Clave D

14. I. V
$M \cap N = \{2\}$
Como b, $c \in M \cap N = \{2\}$, entonces:
$b = c = 2$
Luego: $\frac{a}{2} = \frac{2}{d}$

$\therefore$ d es la tercera proporcional de a y c.



II. V
$b \in M - N = \{3; 5; 7; 11; ...\}$
$c \in N - M = \{0; 4; 6; 8; ...\}$
$\Rightarrow b \neq c$
Luego: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore$ d es cuarta proporcional de a; b y c.

III. F
$b \in M = \{2; 3; 5; 7; 11; ...\}$
$c \in M \cap N = \{2\}$
$b \leq c = 2 \Rightarrow b = 2$

Luego: $\frac{a}{2} = \frac{2}{d}$

$\therefore a \times d = 4$

Clave B

Resolución de problemas

15.

	Pasado	Presente	Futuro
h_1	2k	2k + 8	4x
h_2	5k	5k + 8	5x

$\text{Pasado} \xleftarrow{8} \text{Presente} \xrightarrow{12} \text{Futuro}$

Edad actual: $\frac{2k + 8 + 12}{5k + 8 + 12} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \frac{2k + 20}{5k + 20} = \frac{4}{5} \Rightarrow 10k + 100 = 20k + 80$
$10k = 20$
$k = 2$

$\therefore$ Edad $= 2(2) + 8 = 12$

Clave E

16. Sean las edades de Juan, Pedro y Sandra: J, P y S, respectivamente.

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} J - P = 5 \\ S - J = 3 \end{matrix}\right\} S - P = 8$ ...(I)

Dato: $S = 3P$ ...(II)

Reemplazando (II) en (I):
$3P - P = 8$
$2P = 8 \Rightarrow P = 4$
Si: $P = 4 \Rightarrow S = 12$
Como: $J - P = 5 \Rightarrow J = 9$
↓ ↓
9 4
Piden la suma de las edades:
$J + P + S = 9 + 4 + 12 = 25$

Clave B

17. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

$a = ck^2$
$b = ck$
$a + 2b + c = 36$
$c(k^2 + 2k + 1) = 36$
$c(k + 1)^2 = 36$

$\frac{ck^2 + ck}{ck^2 - ck} = 3 \Rightarrow \frac{ck(k + 1)}{ck(k - 1)} = 3$

$k + 1 = 3k - 3$
$4 = 2k$
$2 = k$
$c(k + 1)^2 = 36$
$c(9) = 36 \Rightarrow c = 4$
$a = ck^2 = 16$
$\therefore 16 - 4 = 12$

Clave E

18. Sean A; B y C los números.
$\frac{A}{B} = \frac{2}{3}; \frac{B}{C} = \frac{3}{4}$

Entonces:
$A = 2k; B = 3k; C = 4k$
$9k = 135 \Rightarrow k = 15$ $\therefore C = 4(15) = 60$

Clave D

19. Edades:
A = Amelia B = Belinda
C = Cecilia D = Delma
A + B + C + D = 156 años

$A = \frac{2}{3}B; \ B = \frac{4}{5}C; \ A = 2D$

$\frac{A}{B} = \frac{2.4k}{3.4k}; \ \frac{B}{C} = \frac{4.3k}{5.3k}; \ \frac{A}{D} = \frac{2.4k}{1.4k}$

$A = 8k$ $D = 4k$ $B = 12k$ $C = 15k$
$\Rightarrow 39k = 156$
$k = 4$
$B = 12k = 48$
$D = 4k = 16$

Clave E

20. Mujeres: 3k
Hombres: 7k
$H - M = 28$
$7k - 3k = 28$
$4k = 28$
$k = 7$
$M = 21$
$H = 49$

$\frac{49 - 14}{21 - 14} = \frac{35}{7} = 5$ $\therefore$ 1 : 5

Clave E

Nivel 3 (página 60) Unidad 3

Comunicación matemática

21. n.° de triángulos obtusángulos: 3
n.° total de triángulos: 6
Respuesta: $\frac{1}{2}$

22.

(Figura: cuadrado de 6 cm × 6 cm con diagonal; lados divididos en 3 cm y 3 cm; región A de 3 cm × 3 cm)

Piden: $\frac{6^2}{3^2} = 4$

Razonamiento y demostración

23. Como la serie de razones geométricas equivalentes es continua, entonces:

$\overline{ab} = \left(\frac{b}{2}\right)b \Rightarrow a = \frac{b}{2} \Rightarrow$ b es par

$\overline{ab}_{(c)} = 110_{(b)} \Rightarrow a \times c + b = b^2 + b$
$a \times c = b^2$
$c = 2b$

Además; se cumple:
$\frac{\overline{bc} - \overline{\left(\frac{b}{2}\right)b}}{\overline{ab} - \overline{ab}_{(c)}} = \frac{110_{(b)}}{3}$

$\frac{10b + 2b - \left(\frac{b}{2}\right) \times 10 - b}{10a + b - a \times c - b} = \frac{110_{(b)}}{3}$

$\frac{6b}{5b - b^2} = \frac{b^2 + b}{3}$

$18 = (b + 1)b(5 - b)$
$3 \times 2 \times 3 = (b + 1)b(5 - b)$

$\Rightarrow b = 2$

Luego: $a = 1; c = 4$

Por lo tanto: $\frac{4^2 - 2^3}{8(1)} = \frac{8}{8} = 1 \in \mathbb{Z}^+$

24.
$a_1 \times a_2 = k^2 \times b_1 \times b_2$
$a_3 \times a_4 = k^2 \times b_3 \times b_4$
$a_5 \times a_6 = k^2 \times b_5 \times b_6$
$\vdots$
$a_{2n-1} \times a_{2n} = k^2 \times b_{2n-1} \times b_{2n}$ (+)

$a_1 \times a_2 + a_3 \times a_4 + ... + a_{2n-1} \times a_{2n}$
$= k^2(b_1 \times b_2 + b_3 \times b_4 + ... + b_{2n-1} \times b_{2n})$

$\Rightarrow \frac{a_1 \times a_2 + a_3 \times a_4 + ... + a_{2n-1} \times a_{2n}}{b_1 \times b_2 + b_3 \times b_4 + ... + b_{2n-1} \times b_{2n}} = k^2$

Resolución de problemas

25. 160 ⇒ blancas
240 ⇒ negras
$\frac{160 + k}{240} = \frac{3}{2}$

$320 + 2k = 720$
$2k = 400$
$\therefore k = 200$

Clave A

26. $3a \,.\, 2a = 4(10)^2 + 86$
$6a^2 = 486$
$a = 9$ $\therefore 3a = 27$

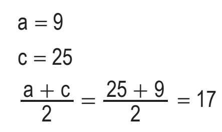
Clave E

27. Proporción geométrica continua:
$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k \Rightarrow b = 15$
$k = \frac{3}{5}$

$\frac{a}{15} = \frac{15}{c} = \frac{3}{5}$

$a = 9$

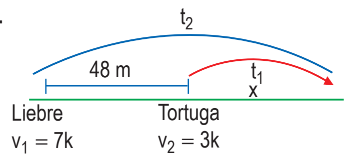
$c = 25$



$\frac{a + c}{2} = \frac{25 + 9}{2} = 17$

Clave B

28.



Liebre: $v_1 = 7k$ — Tortuga: $v_2 = 3k$

$t_1 = t_2$

$\frac{x}{3} = \frac{48 + x}{7}$

$7x = 144 + 3x$

$4x = 144$

$x = 36$

Suma de espacios recorridos:

$\underbrace{x}_{\text{Tortuga}} + \underbrace{48 + x}_{\text{Liebre}} = 48 + 2x = 120 \text{ m}$

Clave C

29. Cant. n.° Bot.

Cant.	n.° Bot.
5 L	k
1 L	10k
1/2 L	20k

$5L \,.\, k + 1L \,.\, 10k + \frac{1}{2} L \,.\, 20k = 15\,000$

$5k + 10k + 10k = 15\,000$

$25k = 15\,000$

$k = 600$

$\Rightarrow \therefore$ n.° Bot. $= 31(600) = 18\,600$

Clave E

30. Las ventajas de:

$\frac{A}{B} = \frac{60}{100}$; $\frac{B}{C} = \frac{20}{50}$

Donde:

$\frac{A}{C} = \frac{6}{25}$

Entonces:

$\frac{6}{25} = \frac{150 - x}{150}$

$36 = 150 - x$

$x = 114$

Clave C

31. $\frac{A}{C} = \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{4}\right)} = 4$

$\frac{C}{M} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{5}\right)} = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow \frac{A}{M} = \frac{20}{3} = \frac{1}{1 - \frac{17}{20}}$

$\therefore$ Alberto le ganará a Manuel por 17/20 de vuelta.

Clave B

32. $\frac{H - 24}{M} = 2 \Rightarrow H - 2M = 24$ ... (I)

$\frac{H - 40}{M} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5H - 2M = 200$ ... (II)

De (I) y (II):

$4H = 176$

$H = 44$

$\Rightarrow M = 10$

Clave C

33. $\frac{V_A}{V_B} = \frac{9k}{2k} \Rightarrow e_A - e_B = 21$

$9k - 2k = 21$

$k = 3$

$\therefore$ La separación inicial es de: $11k = 11(3) = 33$ km

Clave A

34. $\frac{A}{B} = \frac{x}{x - 30}$; $\frac{B}{C} = \frac{x}{x - 15}$; $\frac{A}{C} = \frac{x}{x - 42}$

$\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{A}{C}$

$\frac{x^2}{(x - 30)(x - 15)} = \frac{x}{x - 42}$

$x(x - 42) = (x - 30)(x - 15)$

$x^2 - 42x = x^2 - 45x + 450$

$3x = 450$

$x = 150$ m

Clave A

35. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a + x = 23$

$b + x = 27$

$c + x = 93$

$d + x = 132$

Luego:

$\frac{23 - x}{27 - x} = \frac{93 - x}{132 - x}$

$\frac{23 - x}{4} = \frac{93 - x}{39}$

$897 - 39x = 372 - 4x$

$35x = 525$

$x = 15$

Entonces

$a = 8$; $b = 12$; $c = 78$, $d = 1/9$

$\therefore a + b + c + d = 8 + 12 + 78 + 117 = 215$

Clave C

36. $a - b = b - c$; $b = \frac{a + c}{2}$

$a + 2b + c = 100 \Rightarrow 2(a + c) = 100$

$a + c = 50$; $b = 25$

$a \times b^2 \times c = 375\,000$

$625 \times a \times c = 375\,000$

$a \times c = 600$

$\therefore a = 30$; $c = 20$

Clave E

37. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$; $k \in \mathbb{Z}^+$; $\{a; b; c; d\} \subset \mathbb{Z}$

$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 315$

$(k^3 + 1)b^3 + (k^3 + 1)d^3 = 315$

$(k^3 + 1)(b^3 + d^3) = 315$ < 5×63 ✗ ; 35×9 ✓

$\Rightarrow k = 2$; $b = 3$; $d = 2$

Luego: $a = 6$; $c = 4$

Piden:

$a + b + c + d = 6 + 3 + 4 + 2 = 15$

Clave D

38. $\frac{a \times b \times a \times c \times b \times c}{m \times n \times n \times p \times m \times p} = (2\sqrt[3]{2})^3$

$(m \times n \times p)^2 = \frac{24^2}{(2\sqrt[3]{2})^3}$

$m \times n \times p = \sqrt{\frac{24^2}{16}} = \frac{24}{4} = 6$

Clave C

39. $\frac{A + B}{25} = \frac{A - B}{9} = \frac{A \times B}{136}$

$\frac{A + B + A - B}{34} = \frac{A \times B}{136}$

$\frac{A}{17} = \frac{A \times B}{136}$

$B = 8$; $A = 17$

Clave E

40. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{3} = \frac{24}{f} = k$

$\left.\begin{array}{l} ef + ad = 462 \\ e + f + bc = 412 \end{array}\right\} (-)$ $\quad ad = bc$; $ef = 72$

$ef - (e + f) = 50$

$e + f = 72 - 50$

$e + f = 22$

Luego:

$e + \frac{72}{e} = 22 \Rightarrow e^2 - 22e + 72 = 0$

$(e - 4)(e - 18) = 0$

Si $e = 4$; $k = \frac{4}{3}$ ✓

Si $e = 18$: $k = \frac{18}{3} = 6$

Clave B

41. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = K^2 \Rightarrow a \times c = b \times d \times K^4$

$b \times d = \frac{L^2}{e \times K^2} \Rightarrow a \times c = \frac{L^2 \times K^4}{e \times K^2} = \frac{L^2 \times K^2}{e}$

Piden:

$\sqrt{a \times c \times f} = \sqrt{L^3 \times K^2 \times \left(\frac{f}{e}\right)}$

$= \sqrt{L^2 \times K^2 \times \frac{1}{K^2}} = L$

Clave B

MAGNITUDES PROPORCIONALES

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 64) Unidad 3

Comunicación matemática

1.

2. Clave E

3.

Razonamiento y demostración

4. $\frac{A}{B} = \text{cte.}$

a) F

$\frac{2}{1} = \frac{6}{B} \Rightarrow B = 3$

b) V

$\frac{3}{1} = \frac{9}{B} \Rightarrow B = 3$

c) F

$\frac{2}{4} = \frac{1}{B} \Rightarrow B = 2$

5. a) V

$M \text{ DP } \frac{1}{N} \Rightarrow M^2 \text{ DP } \left(\frac{1}{N}\right)^2$

b) V

$A \text{ DP } \sqrt[3]{B} \Rightarrow A^3 \text{ DP } (\sqrt[3]{B})^3$

c) F

$A \text{ IP } M \Rightarrow A \text{ DP } \frac{1}{M}$

Resolución de problemas

6.

A	27	75	d
B	a	5	4

$\frac{A}{B^2} = k \Rightarrow \frac{A_1}{B_1^2} = \frac{A_2}{B_2^2}$

$\frac{27}{a^2} = \frac{75}{5^2} \Rightarrow a = 3$

$\frac{75}{5^2} = \frac{d}{4^2} \Rightarrow d = 48$

Nos piden: $a + d = 51$

Clave B

7. $\frac{A\sqrt{B}}{C} = k$

$\frac{A\sqrt{C^2}}{C} = \frac{10 . \sqrt{144}}{15}$

$A = \frac{10 . 12}{15}$ $\therefore A = 8$

Clave B

8. $\frac{(A - B)D}{C^2} = k$

$\frac{(3B - B)8}{2^2} = \frac{(2B - B)D}{3^2}$

$\therefore D = 36$

Clave D

9. Repartir:

$432 \Rightarrow 2k; 4k; 7k \text{ y } 11k$

$\Rightarrow 2k + 4k + 7k + 11k = 432$

$24k = 432$

$k = 18$

$\therefore$ El mayor: $11 . 18 = 198$

Clave B

10. Repartir:

$$780 \overset{IP}{\begin{cases} \frac{1}{2} . 72 = 36k \\ \frac{1}{6} . 72 = 12k \\ \frac{1}{8} . 72 = 9k \\ \frac{1}{9} . 72 = 8k \end{cases}}$$

Luego:

$\Rightarrow 36k + 12k + 9k + 8k = 780$

$65k = 780$

$k = 12$

Reemplazando:

$36k = 36 . (12) = 432$

$12k = 12 . (12) = 144$

$9k = 9 . (12) = 108$

$8k = 8 . (12) = 96$

$\therefore$ La menor parte es 96.

Clave C

Nivel 2 (página 64) Unidad 3

Comunicación matemática

11.

12.

Razonamiento y demostración

13. I. F

$(\sqrt[3]{A})^6 \text{ IP } (\sqrt{B})^6 \Rightarrow A^2 \text{ IP } B^3$

II. V

$\sqrt{(\sqrt[3]{A})} \text{ IP } \sqrt{(\sqrt{B})} \Rightarrow \sqrt[6]{A} \text{ IP } \sqrt[4]{B}$

III. V

$A^2 \text{ IP } B^3 \Rightarrow A^2 \text{ DP } \frac{1}{B^3}$

Clave D

14. a) V

$\frac{M}{\sqrt{N}} = k \Rightarrow \frac{M + \sqrt{N}}{\sqrt{N}} = k + 1$

$\therefore M + \sqrt{N} \text{ DP } \sqrt{N}$

b) V

$M^3 \text{ IP } \frac{1}{N^3} \Rightarrow \frac{M^3}{N^3} = k \Rightarrow \frac{M^3 + N^3}{N^3} = k + 1$

$\therefore M^2 - MN + N^2 \text{ DP } \frac{N^3}{M + N}$

c) V

$\frac{1}{M} \text{ IP } N \Rightarrow \frac{M}{N} = k \Rightarrow \frac{M + N}{M - N} = \frac{k + 1}{k - 1}$

$\therefore M + N \text{ IP } \frac{1}{M - N}$

Resolución de problemas

15. $\frac{A . \sqrt{C}}{B} = k$

$\Rightarrow A = ? \wedge B' = \frac{80}{100}B + B = \frac{9}{5}B$

$C' = C - \frac{36}{100}C = \frac{16}{25}C$

$\Rightarrow \frac{720 . \sqrt{C}}{B} = \frac{A . \sqrt{\frac{16}{25}C}}{\frac{9}{5}B} = \frac{A . \sqrt{C} . \frac{4}{5}}{\frac{9}{5}B}$

$\therefore A = \frac{720\left(\frac{9}{5}\right)}{4/5} = 1620$

Clave B

16. $\frac{A}{B . C} = k$

$\Rightarrow \frac{A}{32 . 18} = \frac{25}{24 . 16}$

$A = \frac{75}{2} = 37,5$

Clave A

17. $\frac{A . D^2}{B . C} = k$

$\frac{A . D^2}{B . C} = \frac{A'\left(\frac{D}{2}\right)^2}{(2B)(3C)}$

$A' = 24A$

Por lo tanto, A aumenta 23 veces su valor.

Clave D

18. $\frac{A.B^2.\sqrt{C}}{D^3} = k$

$\frac{4 . 4^2 . \sqrt{4}}{4^3} = \frac{(6B) . B^2 . \sqrt{C}}{(3B)^3}$

$2 = \frac{6B^3\sqrt{C}}{27B^3}$

$9 = \sqrt{C}$

$\therefore C = 81$

Clave C

19. $\frac{A}{B^2} = k \quad \wedge \quad C.B = m$

$\Rightarrow B^2 = \frac{A}{k} \wedge B^2 = \frac{m^2}{C^2}$

$\Rightarrow \frac{A}{k} = \frac{m^2}{C^2} \Rightarrow A . C^2 = k . m^2 = p$

$\therefore$ A es IP a C^2 o A es DP a $\frac{1}{C^2}$

Clave A

20. Sea la cantidad repartida: P

$$P \overset{DP}{\begin{cases} 3A \\ \frac{1}{5}A \\ \frac{7}{10}A \end{cases}}$$

Por dato: $\frac{1}{5}A = 64 \Rightarrow A = 320$

$\therefore P = 3(320) + \frac{1}{5}(320) + \frac{7}{10}(320) = 1248$

Clave E

Nivel 3 (página 65) Unidad 3

Comunicación matemática

21.

22.

Razonamiento y demostración

23. A) V

Sean las partes: $P_1; P_2; ...; P_n$

Del enunciado:

$$\frac{2^1P_1}{1} = \frac{2^2P_2}{2} = ... = \frac{2^iP_i}{i} = ... = \frac{2^nP_n}{n}$$

Entonces:

$$\frac{2^1P_1}{1\times 2^n} = \frac{2^2P_2}{2\times 2^n} = ... = \frac{2^iP_i}{i2^n} = ... = \frac{2^nP_n}{n2^n}$$

$$\frac{P_1}{2^{n-1}} = \frac{P_2}{2\times 2^{n-2}} = ... = \frac{P_i}{i\times 2^{n-i}} = ... = \frac{P_n}{n} = k$$

Luego:

$k(2^{n-1} + 2\times 2^{n-2} + 3\times 2^{n-3} + ... + n) = P$

Sea:

$S = 2^{n-1} + 2\times 2^{n-2} + 3\times 2^{n-3} + ... + n$

$\frac{S}{2} = 2^{n-2} + 2\times 2^{n-3} + 3\times 2^{n-4} + ... + \frac{n}{2}$ (–)

$\frac{S}{2} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + ... + 2 + \frac{n}{2}$

$\frac{S}{2} = 2(2^{n-1} - 1) + \frac{n}{2}$

$S = 4(2^{n-1} - 1) + n$

$k[4(2^{n-1} - 1) + n] = P$

$$k = \frac{P}{4(2^{n-1} - 1) + n}$$

Para $i > 1$:

$$1 < i$$
$$2^{n-i} < i\times 2^{n-i}$$
$$i\times 2^{n-i} + 2^{n-i} < i\times 2^{n-i} + i\times 2^{n-i}$$
$$2^{n-i}(i + 1) < 2\times i\times 2^{n-i}$$
$$(i + 1)\times 2^{n-(i+1)} < i\times 2^{n-i}$$

Para $i = 1$:

$1\times 2^{n-1} = 2\times 2^{n-2} > 3\times 2^{n-3} > 4\times 2^{n-4}$

Entonces, la mayor parte será:

P_1 y P_2 ($P_1 = P_2$)

Luego: $P_1 = P_2 = 2^{n-1}\times k = \frac{2^{n-1}\times P}{4(2^{n-1} - 1) + n}$

B) F

Sean las partes: $P_1, P_2, ..., P_{22}$

Del enunciado:

$x_1 = x$
$x_2 = 2 - x_1 = 2 - x$
$x_3 = 2 - x_2 = x$
$x_4 = 2 - x_3 = 2 - x$
$x_5 = 2 - x_4 = x$
$\vdots$

Además:

$$\frac{mP_1}{x} = \frac{m^2P_2}{2-x} = \frac{m^3P_3}{x} = ... = \frac{m^{22}P_{22}}{2-x}$$

$$\frac{P_1}{xm^{21}} = \frac{P_2}{(2-x)m^{20}} = \frac{P_3}{xm^{19}} = ... = \frac{P_{22}}{2-x} = k$$

Se cumple:

$$k\underbrace{[xm^{21} + (2-x)m^{20} + xm^{19} + ... + 2 - x]}_{S} = P$$

$$S = xm^{21} + xm^{19} + xm^{17} + ... + xm + (2-x)(m^{20} + m^{18} + m^{16} + ... + 1)$$

$$S = xm(m^{20} + m^{18} + m^{16} + ... + 1) + (2-x)(m^{20} + m^{18} + ... + 1)$$

$$S = (xm + 2 - x)(m^{20} + m^{18} + m^{16} + ... + 1)$$

$$S = (xm - x + 2)\frac{m^{22} - 1}{m^2 - 1}$$

Entonces:

$k = \frac{P}{S}$

$$k = \frac{(m^2 - 1)P}{(m^{22} - 1)(xm - x + 2)}$$

Se cumple

$(2-x)m^{i+2} > (2-x)m \wedge xm^{i+2} > xm^i$

Además:

$$m > 1$$
$$mx > x$$
$$mx + x > x + x = 2x > 2$$
$$mx > 2 - x$$
$$m^i \times mx > (2-x)m^i$$
$$m^{i+1}x > (2-x)m^i,\ i: 0; 2; 4; ...; 20$$

Entonces:

$xm^{21} > (2-x)m^{20}$

$xm^{21} > xm^{19} > xm^{17} > ... > xm$

La mayor parte será:

$\frac{P_1}{xm^{21}} = k$

$P_1 = kxm^{21}$

$$P_1 = \frac{xm^{21}(m^2 - 1)P}{(m^{22} - 1)(xm - x + 2)}$$

C) V

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i} = n$$

Sea n las partes: $P_1, P_2, ..., P_n$

Se cumple:

$$\frac{y_1P_1}{x_1} = \frac{y_2P_2}{x_2} = ... = \frac{y_nP_n}{x_n} = k$$

$$\Rightarrow k\underbrace{\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + ... + \frac{x_n}{y_n}\right)}_{n} = P$$

$kn = P$

$k = \frac{P}{n}$

Además, como:

$\frac{x_{13}}{y_{13}} \geq \frac{x_i}{y_i}\ \forall\ i \in [0; n]$

Entonces, la mayor parte será:

$P_{13} = \frac{x_{13}}{y_{13}}k = \frac{x_{13}P}{y_{13}n}$

24. Sean las partes: A, B y C

Se tiene: $mA = nB = pC$

I. V

Como m, n y p son PESÍ dos a dos entonces:

$$\frac{mA}{m\times n\times p} = \frac{nB}{m\times n\times p} = \frac{pC}{m\times n\times p}$$

$$\frac{A}{n\times p} = \frac{B}{m\times p} = \frac{C}{m\times n} = k$$

II. F

Como m, n y p son números primos,entonces:

$$\frac{A}{n\times p} = \frac{B}{m\times p} = \frac{C}{m\times n} = k$$

$k(n\times p + m\times p + m\times n) = N$

$$k = \frac{N}{m\times n + m\times p + n\times p}$$

A la mayor parte le corresponde

$$\frac{pN}{m\times n + m\times p + n\times p}$$

III. F

Como $n = \frac{m + p}{5}$, entonces $m + p$ es un número impar, luego uno de ellos es un número primo par y como $m < n < p$, se tiene: $m = 2$

Además:

$5n = 2 + p = \begin{cases} ...0 \\ ...5 \end{cases}$

$\Rightarrow p = \begin{cases} ...8\ ✗ \\ ...3\ ✓ \end{cases}$

Como $p < 19{,}3$, entonces:

p: 3 ✗; 13✓

ya que $m < n < p$

Luego: $n = \frac{2+13}{5}$

$n = 3$

Se tiene: $k = \frac{N}{m \times n + m \times p + n \times p}$

$k = \frac{N}{6 + 26 + 39}$

$k = \frac{N}{71}$

$\therefore$ La menor parte recibe:

$C = 6k = \frac{6N}{71}$

Clave A

Resolución de problemas

25. $\frac{\text{Costo}}{w^2} = \frac{C_1}{w_1^2} = \frac{C_2}{w_2^2} = \frac{C_3}{w_3^2} = \frac{C_4}{w_4^2}$

Reemplazando:

$\frac{2100}{10^2} = \frac{C_1}{1^2} = \frac{C_2}{2^2} = \frac{C_3}{3^2} = \frac{C_4}{4^2}$

Por proporciones:

$\frac{2100}{100} = \frac{C - (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)}{100 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)}$

$21 = \frac{\text{Pérdida}}{70}$

$\therefore$ Pérdida = S/.1470

Clave B

26. D: densidad

V: volumen

P: peso

Como el peso es el mismo, entonces:
D . V = k

$15{,}6 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot 20 = 0{,}96 \cdot \frac{\pi d^2}{4} h$

$15{,}6 \cdot 20 = 0{,}96 \cdot h$

$325 \text{ cm} = h$

Clave D

27. $\frac{(\text{Precio})(\text{n.º ejemplares})}{\text{Din. invertido}} = k$

$\frac{30 \cdot 400}{6000} = \frac{x \cdot 500}{8000}$

$\Rightarrow x = 4 \cdot 8$

$\therefore x =$ S/.32

Clave D

28. Del cuadro se concluye que mientras A se multiplica por 2, B se divide entre 4.

$\therefore$ B IP $A^2 \Rightarrow B \cdot A^2 = k$

$\Rightarrow x \cdot (12)^2 = 8 \cdot 6^2$

$\therefore x = 2$

Clave C

29. De los cuadros: mientras A se multiplica por 9, B se divide por 3; y mientras B se multiplica por 16, C se multiplica por 2.

A IP B^2 $\wedge$ B DP C^4

$\Rightarrow$ B^2 DP C^8

$\Rightarrow \frac{B^2 \cdot A}{C^8} = k$

$\frac{(12)^2 \cdot (4)}{1} = \frac{x^2 \cdot (16)}{2^8}$

$x^2 = 9216$

$\therefore x = 96$

Clave B

30. Sean las partes:

$\frac{A}{9} = \frac{B}{11} = \frac{C}{16} = k$

Luego:

A = 9k $\Rightarrow$ 12k (3k)

B = 11k $\Rightarrow$ 12k (4k)

C = 16k $\Rightarrow$ 12k

Dato:

$\Rightarrow 4k = 1200$

$k = 300$

$\therefore$ El total: 36k = 36(300) = S/.10 800

Clave C

REGLA DE TRES

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 69) Unidad 3

Comunicación matemática

1. Sea A el área de la base del tanque.

Volumen	Grifos	Tiempo (minutos)
(80 – 58)A	2	33
58A	2 + g	29

$$\frac{2 \times 33}{22A} = \frac{(2+g) \times 29}{58A}$$

$$3 = \frac{2+g}{2} \Rightarrow g = 4$$

$\therefore$ Se deberán abrir 4 grifos.

2.

Precio	Área
18	$6 \times (24)^2$
P	$6 \times (36)^2$

$$P = \frac{18 \times 6 \times 36^2}{6 \times 24^2} = 40,5$$

3. Área total a pintar:
$2,5 \times 12 - 1 \times 1,5 - 2 \times 1,5 = 25,5$
Área pintada: $2,5 \times 6 - 1,5 \times 2 = 12\ m^2$
Área no pintada: 13,5

Del enunciado:

n.° de pintores	Tiempo (horas)	Área pintada
2	4	12
2 + n	1	13,5

$$\frac{2 \times 4}{12} = \frac{(2+n) \times 1}{13,5}$$

$9 = 2 + n \Rightarrow n = 7$

Razonamiento y demostración

4. a) F

n.° de gatos	n.° de ratones	Tiempo (segundos)
18	90	150
30	R	50

$$R = \frac{90 \times 30 \times 50}{18 \times 150} = 50 \text{ ratones}$$

b) F

n.° de gatos	n.° de ratones	Tiempo (segundos)
18	90	150
27	45	T

$$T = \frac{18 \times 150 \times 45}{27 \times 90} = 50 \text{ segundos}$$

c) F

n.° de gatos	n.° de ratones	Tiempo (segundos)
18	90	150
45	R	50

$$R = \frac{90 \times 45 \times 50}{18 \times 150} = 75 \text{ ratones}$$

5.

n.° días	n.° de obreros
20	15
15	N_1
12	N_2
6	N_3

A) F

$N_1 = \frac{20 \times 15}{15} = 20 \Rightarrow$ se contratan 5 obreros más.

B) V

$N_2 = \frac{20 \times 15}{12} = 25 \Rightarrow$ se contratan 10 obreros más.

C) V

$N_3 = \frac{20 \times 15}{6} = 50 \Rightarrow$ se contratan 35 obreros más.

Resolución de problemas

6. Sea x la cantidad de docenas que compré.
Del enunciado:

Compro	DP	Obtengo
12		13
12x		286

Luego: $\frac{12x}{12} = \frac{286}{13}$

$\therefore$ x = 22

Clave C

7.

área	DP	tiempo
$6a^2$		40 min
$6(3a)^2$		x

$$\frac{6a^2}{6.9a^2} = \frac{40}{x} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{40}{x}$$

$\Rightarrow x = 360$ min

$\Rightarrow x = 360$ min $= 6$ h

$\therefore$ Si empezó a las 9:40 a. m., terminará a las 3 : 40 p. m.

Clave E

8.

	P	J	$P \wedge J$
Efic.	3e	e	4e
días	x		12

(IP)

$3ex = 4e \, . \, 12$

$\therefore$ x = 16 días

Clave B

9.

n.° ob.	Efic.	n.° h/d	n.° d.	n.° zap.
64	1	6	60	240
128	3	12	x	360

Sabemos:

$$\frac{(\text{n.° ob.})(\text{n.° días})(\text{n.° h/d})(\text{eficiencia})}{(\text{obra})} = k$$

$$\Rightarrow \frac{64 \,.\, 60 \,.\, 6 \,.\, 1}{240} = \frac{128 \,.\, x \,.\, 12 \,.\, 3}{360}$$

$$\Rightarrow \frac{60}{8} = x \quad \therefore x = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

Clave A

10.

n.° personas	IP	n.° días
x		45
x + 3		40

$x \,.\, 45 = (x + 3)40$
$45x = 40x + 120$
$5x = 120$
$\therefore$ x = 24 personas

Clave E

Nivel 2 (página 69) Unidad 3

Comunicación matemática

11.

Tiempo (segundos)	n.° de vueltas
5	20
3	x

$$\frac{5}{20} = \frac{3}{x}$$

x = 12

12. a)

Eficiencia	Obra	Tiempo
1,2 + 1 + 1,4	234 m	28 horas
1,2	L	42 horas

$$\frac{L}{1,2 \times 42} = \frac{234}{3,6 \times 28}$$

L = 117 m

b)

Eficiencia	Obra	Tiempo
3,6	234	28 horas
1,4	234	t

$3,6 \times 28 = 1,4 \times t$

$\Rightarrow t = 72$ horas

Razonamiento y demostración

13.

n.° de artesanos	n.° de chompas	Tiempo (días)
15	60	25
15 + x	64	10
	DP	IP

$$\frac{15 \times 25}{60} = \frac{(15+x)}{64} \times 10 \qquad x = 25$$

$\therefore$ Es necesario utilizar ambas informaciones.

Clave C

14. Usando I:

n.° de pintores	Área (m^2)
n	36π
n + 7	64π

$64n\pi = 36\pi(n + 7)$

$64n = 36n + 252$

$28n = 252$

$n = 9$

Usando II:

n.° de pintores	Área (m^2)
4n	144π
n	36π

$144\pi n = 144\pi n$

$\therefore$ La información I es suficiente

Clave A

Resolución de problemas

15. IP

n.° obreros	Días
12	28
4 + 8 . (1,6)	x

$12 \,.\, 28 = x(4 + 8(1{,}6))$

$336 = x(16{,}8)$ $\qquad \therefore x = 20$ días

Clave A

16. DP

Volumen de la tubería	Caudal
$\pi \,.\, 12^2 \,.\, h$	360 L/min
$\pi \,.\, 16^2 \,.\, h$	x

$12^2 . x = 16^2 . 360 \Rightarrow x = \dfrac{360 \,.\, 16^2}{12^2} = 640$ L/min

$x = 640 \times 10^{-3} \dfrac{m^3}{min}$

DP

Volumen	Tiempo
$640 \times 10^{-3}\ m^3$	1 min
$192\ m^3$	y min

$\Rightarrow y = \dfrac{192}{640 \,.\, 10^{-3}} = 300$

$\therefore y = 300$ min

Clave C

17. $\dfrac{12 \,.\, 15}{18\ 000} = \dfrac{13 \,.\, 18}{x}$

$x = \dfrac{13 \,.\, 18 \,.\, 18\ 000}{12 \,.\, 15}$

x = 23 400 (mes de diciembre)

Aumento del 35%

$\therefore x = 23\ 400 \,.\, \dfrac{135}{100} =$ S/. 31 590

Clave B

18.

Consumo	Distancia recorrida
$\dfrac{5}{8} - \dfrac{7}{12} = \dfrac{1}{24}$	15
1	x

x = 15 . 24 = 360 km

Con el tanque lleno recorre 360 km.

Clave A

19.

Soldados	Días	Consumen
1800	60	1
1800	37	a

$60a = 37(1)$

$a = \dfrac{37}{60}$

Soldados	Días	Consumen
1800	60	1
1150	(23 + x)	$\dfrac{23}{60}$

$1800(60)\dfrac{23}{60} = 1150\ (23 + x)(1)$

x = 13

Los víveres alcanzarán 13 días más de lo previsto.

Clave D

20.

Obreros	Obra	Dific.	Días	h/d
10	240 m^3	a	15	4
6	360 m^3	2a	x	3

$\dfrac{10 \,.\, 15 \,.\, 4}{240 \,.\, a} = \dfrac{6 \,.\, x \,.\, 3}{360 \,.\, 2a}$

$\therefore x = 100$

Clave C

Nivel 3 (página 70) Unidad 3

Comunicación matemática

21.

2S 2S 2S S 2S 2S S

Área	Tiempo
S	15 min
12S	t

$t = 12 \times 15$

t = 180 minutos

22. ℓ_c: longitud recorrida por el centro de la rueda.
n_v: n.° de vueltas

ℓ_c	n_v
$\dfrac{28\pi}{2}$	7
ℓ	4

$7 \times \ell = 4 \times \dfrac{28\pi}{2}$

$\ell = 8\pi$ cm

Razonamiento y demostración

23. Usando I:

Como $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\}$ y $\mathbb{Z} = \{1; 2; 3; ...\}$

Entonces: $\mathbb{N} - \mathbb{Z} = \{0\}$

Luego: y = 4z

Del enunciado:

n.° de obreros	Tiempo (días)	Obra
x	y	1
x	z	$\dfrac{z}{y}$
x + n	y − z − 10	$\dfrac{y-z}{y}$

Luego: $\dfrac{xz}{\frac{z}{y}} = \dfrac{(x+n)(y-z-10)}{\frac{y-z}{y}}$

$x(y - z) = (x + n)(y - z - 10)$

$x(y - z) = x(y - z) - 10x + n(y - z - 10)$

$10x = n(y - z - 10)$

$\Rightarrow n = \dfrac{10x}{y - z - 10}$

Como y = 4z, entonces:

$n = \dfrac{10x}{3z - 10} \Rightarrow 3z = \overset{\circ}{10} \Rightarrow z = \overset{\circ}{10}$

Usando II:

$z = 10 \Rightarrow y = 40$

$n = \dfrac{x}{2}$

$\therefore$ Las informaciones dadas son insuficientes ya que piden el valor numérico de n.

Clave E

24. Usando I:

$CD[C.A.(\overline{ab})] = 9$

El C. A. $(\overline{ab})$ debe tener 2 cifras, ya que un número de una cifra no puede tener 9 divisores, entonces:

$C.A.(\overline{ab}) = \overline{(9-a)(10-b)} = \begin{cases} p^8 \\ p^2 \times q^2 \end{cases}$

(p y q son números primos distintos entre sí)

No existe un número de dos cifras que sea una potencia perfecta de grado 8, entonces:

$\overline{(9-a)(10-b)} = p^2 \times q^2$

Se cumple:

$10 \leq \overline{(9-a)(10-b)} \leq 99$

$10 \leq p^2 \times q^2 \leq 99$

$3{,}16 \leq p \times q \leq 9{,}95$

$p \times q$ → 4; 5; 6; 7; 8; 9

$p \times q$: 2^2; 5; 2×3; 7; 2^3; 3^2

Luego:

$\overline{(10-a)(10-b)} = 2^2 \times 3^2 = 36$

$\Rightarrow \overline{ab} = 64$

Entonces:

n.° de obreros	n.° de columnas	Tiempo (días)
64	128	15
N	60	10

$\dfrac{N \times 10}{60} = \dfrac{64 \times 15}{128} \Rightarrow N = 45$

Usando II:

$MCD(\overline{ab}; 140) = 4 \Rightarrow \overline{ab} = \overset{\circ}{4}$

Además, como a = b + 2, entonces:

$\overline{(b+2)b} = \overset{\circ}{4}$

$10b + 20 + b = \overset{\circ}{4}$

$11b = \overset{\circ}{4}$

$b = \overset{\circ}{4}$

b: 0; 4; 8

Si b = 0: a = 2, entonces MCD(20; 140) = 20 ✗

Si b = 4: a = 6, entonces MCD (64; 140) = 4 ✓

Si b = 8: a = 10 ✗

Luego: $\overline{ab} = 64$

∴ Cada una de las informaciones por separado es suficiente.

Clave D

Resolución de problemas

25. n.° campanadas = n.° intervalos + 1

⇒ tenemos 3 intervalos en 4 minutos

⇒ cada intervalo demora = $\frac{4\ min}{3}$

5 horas = 300 minutos

⇒ x = 225 intervalos

Dará: 225 + 1 = 226 campanadas

Clave E

26.

Máquinas	Días	Obra
15	24	100%
15 + x(0,6)	24	180%

$15 + 0{,}6x = 15 \cdot \frac{180}{100} \Rightarrow x = 20$

∴ Son 20 máquinas adicionales.

Clave A

27. DP

Tab.	Tiempo
1	45 min
x	9 horas <> 9 × 60 min

Tab.	Tiempo
1	45 min
x	540 min

⇒ x = 12

1 2 3 ... 12 (intervalos)
1 2 3 4 12 13

∴ En total le da 13 tabletas.

Clave D

28.

	Eficiencia	Días
Marco	6k	y
Jennifer	$\frac{36}{5}k$	x
Jorge	5k	66

⇒ Marco y Jennifer:

Eficiencia	Días
$\frac{36}{5}k$	z

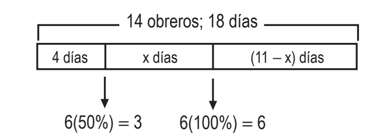
$\Rightarrow 5k \cdot 66 = z(6k + \frac{36}{5}k)$

z = 25

∴ Juntos lo harán en 25 días.

Clave C

29.



Entonces:

$14 \cdot 18 = 14 \cdot 4 + (14 + 3)x + (14 + 6)(11 - x)$

$252 = 56 + 17x + 20(11 - x)$

$3x = 24$

∴ x = 8

Clave D

30.

Obreros	rend.	act.	obra	resist.
30	5	2	60	5
x	3	4	60	2

$\frac{30 \cdot 5 \cdot 2}{60 \cdot 5} = \frac{x \cdot 3 \cdot 4}{60 \cdot 2}$

∴ x = 10

Clave B

MARATÓN MATEMÁTICA (página 72)

1.

	Bailan	No bailan
Varones: 5k	x	5k – x
Mujeres: 4k	x	4k – x

$\Rightarrow \frac{2x}{6} = \frac{9k - 2x}{1}$

$2x = 54k - 12x$

$14x = 54k$

$x = \frac{27k}{7}$

$\therefore \frac{5k - x}{4k - x} = \frac{5k - \frac{27k}{7}}{4k - \frac{27k}{7}} = \frac{8k}{k} = \frac{8}{1}$

Clave B

2. $B_{blancas}: 160$

$B_{negras}: 240$

$\frac{160 + x}{240} = \frac{3}{2}$

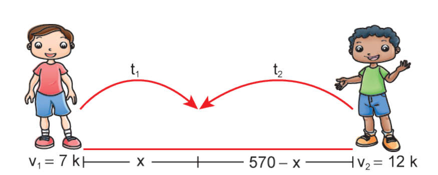
$160 + x = 360$

$\Rightarrow x = 200$

∴ Se deben añadir 200 bolas blancas.

Clave A

3.



$\Rightarrow t_1 = t_2$

$\frac{x}{7k} = \frac{570 - x}{12k}$

$12x = 3990 - 7x$

$19x = 3990$

$x = 210$

Cada una recorre 210 m y 360 m.

Clave C

4. $\overline{abc}_{(5)} = M^2$

$5^2 \leq \overline{abc}_{(5)} < 5^3$

$25 \leq M^2 < 125$

$M \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$

Por lo tanto, son 7 números.

Clave D

5. $\overline{ab5} = k^2$ (cuadrado perfecto)

↓↓
2 2
6

∴ La suma de valores de a es 8.

Clave D

6. Sea N el número:

Del dato:

$r_e + 19 = r_d$ ...(I)

$r_d + 20 = r_{máx.}$ ...(II)

De (1):

$r_e = r_d - 19$ ...(III)

Pero:

$r_e + r_d = 2k + 1$

$r_e = 2k + 1 - r_d$

Reemplazando en (III):

$r_d - 19 = 2k + 1 - r_d$

$2r_d = 2k + 20$

$r_d = k + 10$ ...(α)

De (II):

$r_d + 20 = r_{máx.}$

$r_d + 20 = 2k$

$r_d = 2k - 20$ ...(β)

De (α) y (β):

$2k - 20 = k + 10$

$k = 30$

Luego:

$N = k^2 + r_d = k^2 + (2k - 20)$

$N = 30^2 + 2(30) - 20$

∴ N = 940

Clave C

7. $\frac{a}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{b}{4 \cdot 3} = k$

$a + b = 390$

$k + 12k = 390$

$13k = 390$

$k = 30$

La parte mayor es:
$b = 12 \, . \, k = 12(30) = S/.360$

Clave E

8. $\frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6} = ... = \frac{r}{18} = k$

$a + b + c + ... + r = 900$

$k(2 + 4 + 6 + ... + 18) = 900$

$k \, . \, 2\,(1 + 2 + 3 + ... + 9) = 900$

$2k \, . \, \frac{9(10)}{2} = 900$

$90k = 900$

$k = 10$

$\therefore$ La parte mayor es: $r = 18 \, . \, k = S/.180$

Clave E

9.

Por propiedad: $V_A.D_A = V_B.D_B \quad \wedge \quad V_B = V_C$

$\Rightarrow \; 30 \, . \, V_A = 50 \, . \, 27$

$V_A = 45$

$\therefore$ La rueda A da 45 vueltas.

Clave D

10. horas DP obra

horas		obra
8		5^3
108		$x(15)^3$

$\frac{8}{108} = \frac{5^3}{x \, . \, 15^3}$

$\therefore x = \frac{1}{2}$

Clave C

11. $\frac{\text{Área . n.° tubos}}{\text{Cant. de agua}} = k$

$\frac{\pi(1,5)^2 \, . \, x}{N} = \frac{\pi(4,5)^2 \, . \, 1}{N}$

$2,25x = 20,25$

$\therefore x = 9$

Clave D

12. $\frac{\text{n.° personas . n.° días}}{\text{volumen}} = k$

$\frac{75 \, . \, 20}{(\pi 8^2)\,12} = \frac{50 \, . \, 60}{(\pi x^2)\,6}$

$\frac{125}{64} = \frac{500}{x^2}$

$x^2 = 256$

$\Rightarrow x = 16 \text{ m}$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 77) Unidad 4

Comunicación matemática

1. Sea V el volumen de cada cubito y n el número de estos en el cubo compacto formado.

$V_{Total} = 800\%V_{Rojo}$

$V_{Total} = 8\ V_{Rojo}$

$nV = 8(8V) \Rightarrow n = 64$

Luego, deben adicionarse: 64 – 5 = 59 cubitos

2.

3.

Razonamiento y demostración

4. a) F

$7\%N + 400\%N = 407\%N = 4{,}07N$

b) F

$5 \times 4 \times (6\%N) = 120\%N = 1{,}2N$

c) F

$9{,}11\%P = \frac{9{,}1}{100}P = 0{,}0911P$

5. a) V

$2^2 \times \sqrt{2^6}\ \%(200) = 2^6\%(100)$

b) V

$P\%N = \frac{P}{100} \times N = \frac{N}{100} \times P = N\%P$

c) V

$49^2 = 7 \times 7^3 < 8 \times 7^3 = 14^3 < 41^3$

$\Rightarrow 41\%(49^2) < 42\%(41^3)$

Resolución de problemas

6. $\frac{2{,}5}{100} \ .\ 4000 + \frac{0{,}25}{100} \ .\ 6800 = 100 + 17 = 117$

Clave E

7. $\frac{x^2}{100} \ .\ 720 = 259{,}2$

$720x^2 = 25\,920$

$x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$

Clave E

8. $\frac{10}{100} \ .\ (4n - 100) = 70$

$4n - 100 = 700$

$4n = 800 \Rightarrow n = 200$

Clave B

9. $\frac{(2x - 4)}{100} \ .\ 810 = 48{,}6$

$2x - 4 = 6$

$x = 5$

Clave A

10. $P_v = P_c + G$

$720 = P_c + 20\%P_c$

$720 = 120\%P_c$

$P_c = S/.600$

Clave A

Nivel 2 (página 77) Unidad 4

Comunicación matemática

11. $V_A = a^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$; $V_B = a_B^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$

Del enunciado: $V_A = 12{,}5\%\ V_B$

$a^3 \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{12{,}5}{100} \times a_B^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$

$a^3 = \frac{1}{8}a_B^3 \Rightarrow a_B = 2a$

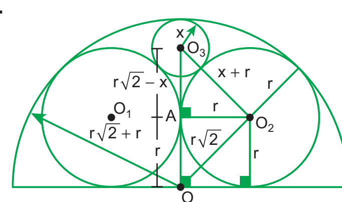
Luego:

$A_A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; A_B = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{4}$

Piden:

$\frac{A_A}{A_B} \times 100\% = \frac{a^2\sqrt{3}}{4a^2\sqrt{3}} \times 100\% = 25\%$

12.



En el ⊿ O_3AO_2:

$(r\sqrt{2} - x)^2 + r^2 = (x + r)^2$

$2r^2 - 2\sqrt{2}\,rx + x^2 + r^2 = x^2 + 2rx + r^2$

$r - \sqrt{2}x = x$

$r = x(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow x = r(\sqrt{2} - 1)$

Luego:

$A_T = \frac{\pi r^2(1 + \sqrt{2})^2}{2} = \left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}\right)\pi r^2$

$A_{sombreada} = \pi r^2 + \pi r^2 + \pi r^2(\sqrt{2} - 1)^2$

$A_{sombreada} = (5 - 2\sqrt{2})\pi r^2$

Piden:

$\frac{(5 - 2\sqrt{2})\pi r^2}{\left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}\right)\pi r^2} \times 100\% = (4600 - 3200\sqrt{2})\%$

Razonamiento y demostración

13. a) F

$9\%(99) = 8{,}91 \notin \mathbb{Z}$

b) V

$a\%\left(\frac{198}{\overline{aa}}\right) = \frac{a}{100} \times \frac{198}{11a} = \frac{18}{100} = 0{,}18$

c) F

$5\%5\%5\%\ 8\sqrt{25} = \frac{5^3 \times 8 \times 5}{(100)^3} = 5 \ .\ 10^{-3}$

14. I. F

$4\%(\overline{abc00} + 25) = 4\overline{abc} + 1 \in \mathbb{Z}$

II. F

$17\%(\overline{abcd5}) = \frac{17 \times \overline{abcd5}}{100} = \overline{\dots m, \underbrace{xy}}$

2 cifras decimales

III. V

$16\%N^2 = 16\%(\overline{abcd5})^2 = 16\%(\overline{\dots z25})$

$= \frac{16}{100} \times (\overline{\dots z00}) + \frac{16}{100} \times 25$

$= 16 \times \overline{\dots z} + 4 \in \mathbb{Z}$

Clave C

Resolución de problemas

15. $P_v = 552$ $\quad G = 15\%P_c$

$P_f = 120\%P_c$

Sabemos:

$P_v = P_c + G \Rightarrow P_v = 115\%P_c$

$552 = 115\%P_c \Rightarrow P_c = 480$

Luego: $P_f = 120\%(480)$

$P_v + d = 576$

$552 + d = 576$

$d = 24$

$G = 15\%P_c = 15\%(480) \Rightarrow G = 72$

Piden: $G - d = 72 - 24 = 48$

$\therefore G - d = 48$

Clave B

16. Pc = 441, $\quad$ Pv = 441 + 12,5% Pv,

Pv = 504

$\left(\begin{matrix}\text{Descuento}\\ \text{único}\end{matrix}\right) = 100\% - 80\% \ .\ 75\% \ .\ 60\%$

⇒ El descuento es 64%

Pf = Pv + D

Pf = 504 + 64%Pf ⇒ Pf = S/.1400

Clave C

17. Sea el precio de venta de los 10 televisores: P_v'

P_v' = S/.2500

⇒ Precio venta 1 televisor = S/.250

Por dato:

$P_v = P_c + G$

$P_v = P_c + 25\%P_c = 125\%P_c$

$\Rightarrow 250 = 125\%P_c \Rightarrow P_c = 200$

El 50% menor del costo será:

200 – 50%200 = 100

Con el monto podrá adquirir:

$\frac{2500}{100} = 25$ televisores

Clave B

18. $P_{v_1} = P_{c_1} + 10\%\ P_{c_1} = 110\%\ P_{c_1}$

$P_{v_2} = P_{c_2} - 10\%\ P_{c_2} = 90\%\ P_{c_2}$

Dato: $P_{v_1} = P_{v_2}$

$110\%P_{c_1} = 90\%P_{c_2} \Rightarrow \frac{P_{c_1}}{P_{c_2}} = \frac{9}{11}$

Entonces:

$P_{c_1} = 9k \Rightarrow P_{v_1} = 9{,}9k$

$P_{c_2} = 11k \Rightarrow P_{v_2} = 9{,}9k$

$P_{c_T} = 20k \wedge P_{v_T} = 19{,}8k$

$P_{v_T} < P_{c_T}$, la pérdida será:

$\frac{(20k - 19{,}8k)}{20k} \times 100\% = 1\%$

Clave C

19.
- $Pv_1 = Pc + 8\%Pc$ $\quad G_1 = 8\%Pc$
  $Pv_1 = 108\%Pc$
- $Pv_2 = Pc + 8\%Pv$ $\quad G_2 = 8\%Pv_1$
  ↓
  108%Pc

Dato: $G_2 - G_1 = 8$

108% . Pc . 8% – 8% . Pc = 8

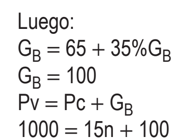
∴ Pc = 1250

Clave A

20. Sea n el n.° de artículos.

$Pc = 15n \wedge Pv = 1000$

$G_B = G_N +$ Gastos



Luego:

$G_B = 65 + 35\%G_B$

$G_B = 100$

$Pv = Pc + G_B$

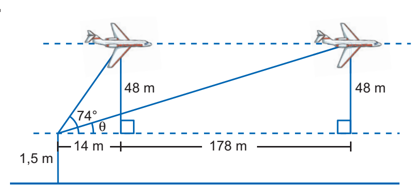
$1000 = 15n + 100 \qquad \therefore n = 60$

Clave C

Nivel 3 (página 78) Unidad 4

Comunicación matemática

21.



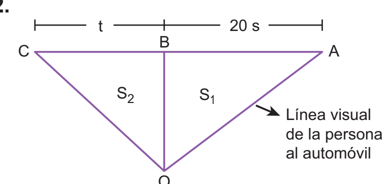
$\tan\theta = \dfrac{48}{192} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \theta = 14°$

Luego:

$\left(\dfrac{14° - 74°}{74°}\right) \times 100\% = -81,08\%$

$\therefore$ Disminuye en un 81,08%.

22.



$S_1 = 80\%S_2$

$\Rightarrow \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{4}{5}$

Además:

$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{20}{t} \Rightarrow \dfrac{4}{5} = \dfrac{20}{t} \Rightarrow t = 25\ s$

Razonamiento y demostración

23. a) V

$\left(\dfrac{p^2 + p - 1}{p - 1}\right) \times \dfrac{1}{100} \times A = k \in \mathbb{Z}$

$\dfrac{(p-1)(p+2)+1}{p-1} \times A = 100k$

$\left(p + 2 + \dfrac{1}{p-1}\right)A = 100k$

$A(p+2) + \dfrac{A}{p-1} = 100k$

$\dfrac{A}{p-1} = 100k - A(p+2) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow A = \overset{\circ}{(p-1)}$

b) V

$N\%\overline{ab4} = M + 0,\overline{4ba} \times N$

Como $\left\{N; M; \dfrac{a+1}{2}\right\} \subset \mathbb{Z}^+$, entonces a es impar.

Entonces:

$\dfrac{10 \times N \times \overline{ab4}}{1000} - \dfrac{N \times \overline{4ba}}{1000} = M \in \mathbb{Z}^+$

$N\underbrace{(10 \times \overline{ab4} - \overline{4ba})}_{\text{impar}} = 1000M$

$\Rightarrow N = \overset{\circ}{2}$

c) V

$z = p + q \Rightarrow \dfrac{p}{100} \times (p + q) = q$

$p \times (p + q) = 100q$

$p^2 + pq = 100q$

$\dfrac{p^2}{q} + p = 100 \qquad \ldots (1)$

Como q es un número primo y $p \in \mathbb{Z}^+$, se cumple:

$p^2 = \overset{\circ}{q} \Rightarrow p^2 = \overset{\circ}{q^2} = q^2k^2, k \in \mathbb{Z}^+$

Luego; en (1):

$qk^2 + qk = 100$

$q\,k\,(k+1) = 5 \times 4 \times 5$

$\Rightarrow q = 5;\ k = 4;\ p = 20$

$\therefore 2p + q^2 = 40 + 25 = 65$

24. $N = m\%(\overline{mnpqrs})$

$N = \dfrac{m}{100} \times \overline{mnpqrs}$

I. V

Del enunciado:

$s - 1 = m - 1 = 2n$

$\Rightarrow s = m \wedge m = 2n + 1$ (impar)

$s > 0$

Además, como $MCD(\overline{mnpqrs};\ 100) > 1$, entonces $\overline{mnpqrs}$; y 100 tienen divisores en común diferentes de 1.

Luego:

$\Rightarrow m \times \overline{mnpqrm} = \begin{cases} \overset{\circ}{2}\ ✗ & \text{(ya que m es impar)} \\ \overset{\circ}{5}\ ✓ \end{cases}$

$\Rightarrow m = 5 \wedge n = 2$

Por lo tanto:

$9492 = \overset{\circ}{(5+2)}$

II. V

Como $m > 0$ y $m = 1 - p^2$, entonces:

$0 \leq p^2 < 1 \quad (p \in \mathbb{N})$

$0 \leq p < 1$

$\Rightarrow p = 0 \wedge m = 1$

Luego: $1\%(\overline{1npqrs}) = N \in \mathbb{Z}^+$

$\dfrac{1}{100} \times (\overline{1npqrs}) = N$

$\Rightarrow \overline{1npqrs} = \overset{\circ}{100}$

$r = s = 0$

Por lo tanto:

$\forall\ x \in Z: \overset{\circ}{x} = 0$ (cero es múltiplo de todo número entero)

III. F

Como $s^2 > n + 1 \geq 1$, entonces:

$s > 0 \wedge \overline{mnpqrs} \neq \overset{\circ}{10}$

Además; m = 9, se tiene:

$\therefore \dfrac{9}{100} \times \overline{9npqrs} = N \in \mathbb{Q}$

Clave D

Resolución de problemas

25.
- $Pv_1 = Pc + 8\%Pc \qquad G_1 = 8\%Pc$

  $Pv_1 = 108\%Pc$
- $Pv_2 = Pc + \underbrace{8\%Pv_1}_{G_2} \qquad G_2 = 8\%Pv_1$

Dato: $G_2 - G_1 = S/.8$

$108\% \,.\, Pc \,.\, 8\% - 8\% \,.\, Pc = S/.8$

$\therefore Pc = S/.1250$

Clave A

26. Total = 10N ⇒ 10k soles

$Pv_1 \Rightarrow G_1 = \overbrace{-24\%k}^{4N.6\%} \qquad Pv_2 \Rightarrow G_2 = \overbrace{6\%k}^{3N.2\%}$

$-24\%k + 6\%k + G_3 = 9\%10k$

$G_3 = 108\%\ k$

$G_3 = 3k\ (36\%)$

$G_3 = 3N\ (36\%)$

$\therefore$ Debe ganar el 36%

Clave A

27. Dato: $\dfrac{A}{A_1} = \dfrac{r^2}{r_1^2} = \dfrac{100}{56,25}$

$\Rightarrow \dfrac{r}{r_1} = \dfrac{10}{7,5} = \dfrac{100}{75}$

Ahora:

$\dfrac{V}{V_1} = \dfrac{r^3}{r_1^3} = \left(\dfrac{100}{75}\right)^3$

$\dfrac{V}{V_1} = \dfrac{1\,000\,000}{421\,875}$

$\Rightarrow \dfrac{V - V_1}{V} = \dfrac{578\,125}{1\,000\,000}$ x 100 %

$= 57,8125\% \approx 57,81\%$

Clave D

28. Total: 60 personas

	Usan anteojos	No usan anteojos
V	75%60%60	25%60%60
M	75%40%60	25%40%60

n.° personas que usan anteojos

$\dfrac{3}{4} \,.\, \dfrac{3}{5} \,.\, 60 + \dfrac{3}{4} \,.\, \dfrac{2}{5} \,.\, 60$

$27 + 18 = 45$

$\therefore$ El porcentaje será: $\dfrac{45}{60} \,.\, 100\% = 75\%$

Clave E

29. Varones:

Terno:40%40%200 = 32

No usan terno: 60%40%200 = 48

Mujeres:

Falda: 80%60%200 = 96

No Falda: 20%60%200 = 24

Piden:

x%(48) = 24

∴ x% = 50%

Clave E

30. Gasta: 25%(4k) = k

Queda: 4k

Total: 5k

El viernes le quedará:

$\left(\dfrac{4}{5}\right)^5 \times 625 = 204,8$

$\therefore$ El viernes en la tarde tendrá S/.204,8.

Clave C

31. Sea:

S: salario inicial
Primer aumento:
$12\%(20\%S) = 2,4\%S$

Segundo aumento:
$15\%[\underbrace{50\%(80\%S)}_{40\%S}] = 6\%S$

Tercer aumento:
$20\%[S - (20\%S + 40\%S)] = 20\%[40\%S] = 8\%S$
Entonces:
Salario final:
$S + 2,4\%S + 6\%S + 8\%S = 116,4\%S$
Por dato:
$200 = 40\%S$
$\Rightarrow S = 500$
$\therefore$ Salario final $= 116,4\%(500) =$ S/.582

Clave C

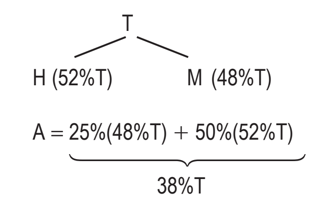
32. Sea n la cantidad inicial de dinero.

Del enunciado:
Primero:
$n + 10\%n = 110\%n$
Luego:
$110\%n - 80\%(110\%n) = 22\%n$
Finalmente:
$22\%n - 70\%(22\%n) = 6,6\%n = 66$
$\Rightarrow n =$ S/.1000

Entonces perdió:
$n - 6,6\%n = 93,4\%n = 93,4\%(1000) =$ S/.934

Clave A

33. T: total de personas



$A = \underbrace{25\%(48\%T) + 50\%(52\%T)}_{38\%T}$

$\therefore$ Por la lista A votaron el 38% del total.

Clave C

34. $A - B = 20\%C$ ...(1)

$B - C = 10\%A$ ...(2)
Por dato: $A = 200$

De (2):
$B - C = 10\%(200)$
$C = B - 20$ ...(3)

Reemplazando (3) en (1):
$A - B = 20\%C$
$\Rightarrow 200 - B = 20\%(B - 20)$
$200 - B = 20\%B - 4$
$\therefore B =$ S/.170

Clave B

35. V: valor de la obra

Mo: mano de obra
Im: indemnizaciones

Piden: $x\%(V) = Mo$
Del enunciado:

$Mo + Im = 40\%V$ ...(1)
$Im = 60\%Mo$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):
$Mo + 60\%Mo = 40\%V$
$160\%Mo = 40\%V$
$Mo = 0,25V = 25\%V$

Por lo tanto:
La mano de obra representa el 25% del valor de la obra.

Clave C

36. Sea $T = 100K$: total de animales.

P: patos
G: gallinas
C: conejos

Del enunciado:
$P = 20\%T = 20K$
$G = 45\%T = 45K$
$C = 35\%T = 35K$

Por condición:
$G' = 2G = 90K$
$P = 20K$
$C' = 4C = 140K$

Piden:
$x\%(G' + C' + P) = P$
$\Rightarrow x\%(90K + 140K + 20K) = 20K$
$\therefore x\% = 8\%$

Clave B

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 80) Unidad 4

1. $X_{mín.} = 10$ $\quad X_{máx.} = 19{,}8 \quad \Rightarrow \quad R = 19{,}8 - 10 = 9{,}8$

Luego: $c = \dfrac{9{,}8}{5} = 1{,}96 \approx 2$

Entonces:

I_i	f_i	F_i	h_i
[10 ; 12⟩	3	3	0,15
[12 ; 14⟩	5	8	0,25
[14 ; 16⟩	6	14	0,30
[16 ; 18⟩	4	18	0,20
[18 ; 20⟩	2	20	0,10
			1

Piden: $h_3 + h_5 + F_4 = 0{,}30 + 0{,}10 + 18 = 18{,}4$

Clave C

2. Sea n el n.° de observaciones, entonces: $\dfrac{a}{n} = \dfrac{5}{a} \Rightarrow n = \dfrac{a^2}{5}$

También: $\dfrac{25}{a} = 1 \Rightarrow a = 25 \Rightarrow n = 125$

Luego: $f_1 = 20$ $\quad f_3 = 35$ $\quad f_5 = 15$

$\therefore\ f_1 + f_3 + f_5 = 20 + 35 + 15 = 70$

Clave A

3. $H_2 = 0{,}58 \Rightarrow F_2 = 58$

$\therefore$ 100 – 58 = 42 alumnos poseen una estatura no menor de 1,60 m

Clave E

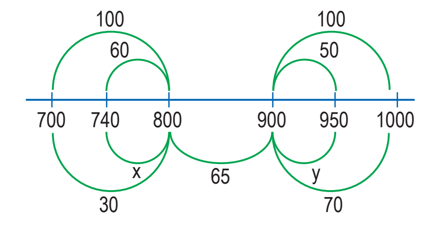
4. Completando la tabla:

I_i	f_i	F_i
[50; 70⟩	32	32
[70; 90⟩	40	72
[90: 110⟩	48	120
[110; 130⟩	44	164
[130; 150⟩	36	200

Piden: $f_2 + f_3 + f_4 = 40 + 48 + 44 = 132$

Clave B

5.



$\dfrac{x}{30} = \dfrac{60}{100}$ $\qquad \dfrac{y}{70} = \dfrac{50}{100}$

$x = 18$ $\qquad y = 35$ $\qquad \therefore\ 18 + 65 + 35 = 118$

Clave E

6.

20	20	20	20	20
20	23	23	23	23
23	25	25	25	30

$M_o = 20$ $\qquad M_e = 23$ $\qquad \therefore\ M_e - M_o = 3$

Clave D

7.

12	12	12	12	15
15	15	15	15	15
17	17	17	18	18
18	18	18	18	18

$M_o = 18$

$\overline{X} = \dfrac{12 \times 4 + 15 \times 6 + 17 \times 3 + 18 \times 7}{20} = 15{,}75$

$\therefore\ M_o - \overline{X} = 18 - 15{,}75 = 2{,}25$

Clave C

8.

20 20
10 4
1000 1010 1020 1024 1040
x y
280 260

$\dfrac{x}{280} = \dfrac{10}{20}$ $\qquad \dfrac{y}{260} = \dfrac{4}{20}$

$\therefore\ x + y = 140 + 52 = 192$

Clave B

9.

I_i	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[27; 31⟩	29	4	4	0,10	0,10
[31; 35⟩	33	7	11	0,175	0,275
[35: 39⟩	37	12	23	0,30	0,575
[39; 43⟩	41	11	34	0,275	0,85
[43; 47]	45	6	40	0,15	1

$\overline{X} = \dfrac{29 \times 4 + 33 \times 7 + 37 \times 12 + 41 \times 11 + 45 \times 6}{40} = 37{,}8$

$\therefore\ \overline{X} + h_4 + H_3 = 37{,}8 + 0{,}275 + 0{,}575 = 38{,}65$

Clave B

10.

I_i	f_i
[50; 56⟩	20
[56; 62⟩	75 ← M_o
[62: 68⟩	50
[68; 74⟩	30
[74; 80⟩	25

$d_1 = 75 - 20 = 55$

$d_2 = 75 - 50 = 25$

$\Rightarrow M_o = 56 + 6\left(\dfrac{55}{55 + 25}\right)$

$M_o = 60{,}125 \approx 60{,}1$

Clave E

11.

I_i	f_i	F_i
[1,55; 1,60⟩	8	8
[1,60; 1,65⟩	12	20
[1,65; 1,70⟩	14	34 → Me
[1,70; 1,75⟩	9	43
[1,75; 1,80⟩	7	50

$n = 50 \Rightarrow \dfrac{n}{2} = 25$

$Me = 1{,}65 + 0{,}05\left(\dfrac{25 - 20}{14}\right) = 1{,}668 \approx 1{,}67$

Clave D

12.

11	11	11	12	12	12	12	12	15	15
15	15	15	15	15	18	18	18	18	18
18	18	18	18	20	20	20	20	20	20

$$\overline{X} = \frac{11\times 3 + 12\times 5 + 15\times 7 + 18\times 9 + 20\times 6}{30} = 16$$

$M_e = \dfrac{15+18}{2} = 16{,}5$ $\qquad \therefore\ \overline{X} + M_e = 16 + 16{,}5 = 32{,}5$

Clave C

13.

I_i	f_i	x_i
[50 ; 58⟩	4	54
[58 ; 66⟩	6	62
[66 ; 74⟩	10	70
[74 ; 82⟩	13	78
[82 ; 90⟩	7	86

$d_1 = 13 - 10 = 3$
$d_2 = 13 - 7 = 6$

$$M_o = 74 + 8\left(\frac{3}{3+6}\right) = 76{,}67 \approx 76{,}7$$

$$\overline{X} = \frac{54\times 4 + 62\times 6 + 70\times 10 + 78\times 13 + 86\times 7}{40} = 72{,}6$$

$\therefore\ M_o - \overline{X} = 4{,}1$

Clave B

14.

I_i	f_i	F_i
[250 ; 300⟩	40	40
[300 ; 350⟩	64	104
[350 ; 400⟩	44	148
[400 ; 450⟩	32	180
[450 ; 500]	20	200

← M_e y M_o (fila [300 ; 350⟩)

$n = 200 \Rightarrow \dfrac{n}{2} = 100;\ d_1 = 64 - 40 = 24;\ d_2 = 64 - 44 = 20$

$$M_e = 300 + 50\left(\frac{100-40}{64}\right) = 346{,}875 \approx 346{,}9$$

$$M_o = 300 + 50\left(\frac{24}{44}\right) = 327{,}273 \approx 327{,}3 \Rightarrow M_e + M_o = 674{,}2$$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 82) Unidad 4

Comunicación matemática

1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4.

I_i	f_i	h_i
[; ⟩		k
[; ⟩		k/2
[; ⟩		k/3
[; ⟩		k/4
[; ⟩		k/5
[; ⟩		k/6
[; ⟩		k/7

$$k\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) = 1$$

$$\frac{363k}{140} = 1 \Rightarrow k = \frac{140}{363}$$

Del enunciado: $\dfrac{f_3}{n} - \dfrac{f_6}{n} = \dfrac{70}{n} \Rightarrow \dfrac{k}{3} - \dfrac{k}{6} = \dfrac{70}{n} \Rightarrow \dfrac{k}{6} = \dfrac{70}{n}$

$$n = \frac{6\times 70}{k} \Rightarrow n = \frac{6\times 70\times 363}{140} \Rightarrow n = 1089$$

Luego:

a) F

b) V

$f_2 = n\dfrac{k}{2} = 1089\left(\dfrac{140}{363\times 2}\right) = 210$

c) V

$h_7 = \dfrac{k}{7} = \dfrac{140}{363\times 7} = 0{,}06$

5. Completando la tabla:

I_i	f_i	x_if_i	F_i	x_i
[4; 8⟩	a	$k^2 - 6$	5	6
[8; 12⟩	k		11	10
[12; 16⟩	k		17	14
[16; 20⟩	a	90	22	18

$18a = 90 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 6a = k^2 - 6 \Rightarrow 30 = k^2 - 6 \Rightarrow k = 6$

Luego:

a) V

$f_3 + f_4 = 6 + 5 = 11$

b) V

$F_2 = 11$

c) F

$F_4 = 22 = 2F_2$

Resolución de problemas

6. $\overline{X}_A = \dfrac{12+13+13+17+17+13+15+18+19+18}{10} = 15{,}5$

$\overline{X}_B = \dfrac{11+16+17+15+15+17+11+17+16+14}{10} = 14{,}9$

$\overline{X}_C = \dfrac{13+14+16+16+18+19+20+15+17+11}{10} = 15{,}9$

$\therefore\ \overline{X}_C > \overline{X}_A > \overline{X}_B$

Clave C

7. A: 12; 13; 13; 13; 15; 17; 17; 18; 18; 19

$Me_A = \dfrac{15+17}{2} = 16$

B: 11; 11; 14; 15; 15; 16; 16; 17; 17; 17

$Me_B = \dfrac{15+16}{2} = 15{,}5$

C: 11; 13; 14; 15; 16, 16; 17; 18; 19; 20

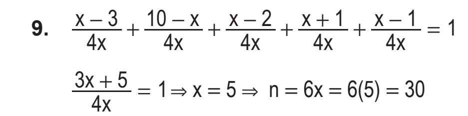
$Me_C = \dfrac{16+16}{2} = 16$

Clave D

8. $Mo_A = 13;\ Mo_B = 17;\ Mo_C = 16$

$\therefore\ Mo_B > Mo_C > Mo_A$

Clave E



9. $\dfrac{x-3}{4x}+\dfrac{10-x}{4x}+\dfrac{x-2}{4x}+\dfrac{x+1}{4x}+\dfrac{x-1}{4x}=1$

$\dfrac{3x+5}{4x}=1 \Rightarrow x=5 \Rightarrow\ n=6x=6(5)=30$

Clave E

Nivel 2 (página 83) Unidad 4

Comunicación matemática

I_i	F_i	f_i	x_i
[0 ; 6⟩	50	50	3
[6 ; 12⟩	70	20	9
[12 ; 18⟩	100	30	15
[18 ; 24⟩	120	20	21
[24 ; 30]	170	50	27
		n = 170	

10. $\dfrac{n}{2}=85 \Rightarrow\ Me=12+6\left(\dfrac{85-70}{30}\right)=15$

11. $\overline{X}=\dfrac{3\times50+9\times20+15\times30+21\times20+27\times50}{170}=15$

Razonamiento y demostración

12.

I_i	f_i	H_i	h_i
[; ⟩	f_1	f_1/n	f_1/n
[; ⟩	f_5	$(f_1+f_5)/n$	f_5/n
[; ⟩	f_1+f_5	$2(f_1+f_5)/n$	$(f_1+f_5)/n$
[; ⟩	f_1+f_5	$3(f_1+f_5)/n$	$(f_1+f_5)/n$
[; ⟩	f_5	$(3f_1+4f_5)/n$	f_5/n
[; ⟩	f_1	$(4f_1+4f_5)/n$	f_1/n
	$n=4(f_1+f_5)$		

Luego:

a) F

$H_1+H_2+H_3=\dfrac{f_1+f_1+f_5+2f_1+2f_5}{4(f_1+f_5)}=\dfrac{f_1}{4(f_1+f_5)}+\dfrac{3(f_1+f_5)}{4(f_1+f_5)}$

$=\ h_1+0{,}75>0{,}25$

b) F

$H_2+H_3=\dfrac{f_1+f_5+2(f_1+f_5)}{4(f_1+f_5)}=0{,}75$

c) V

$H_2+H_3+H_4=\dfrac{f_1+f_5+2(f_1+f_5)+3(f_1+f_5)}{4(f_1+f_5)}=\dfrac{6}{4}=1{,}5$

13. $c=\dfrac{82-22}{5}=12;\ h_4=2h_1=3h_3=6k\ \Rightarrow\ h_4=6k\quad h_1=3k\quad h_3=2k$

Como la distribución es simétrica, entonces: $f_1=f_5 \wedge f_2=f_4$

I_i	f_i	F_i
[22 ; 34⟩	3k	3k
[34 ; 46⟩	6k	9k
[46 ; 58⟩	2k	11k
[58 ; 70⟩	6k	17k
[70 ; 82⟩	3k	20k
	n = 20k	

Como: $h_4=2h_1=3h_3$

$\Rightarrow\ f_4=2f_1=3f_3=6k$

$f_4=6k;\ f_1=3k;\ f_3=2k$

$F_5=n=20k<60\ \Rightarrow\ k<3$

$(f_3+F_3+7)^0=1<3k+9k-11k$

$1<k\ \Rightarrow\ k=2$

En la tabla:

I_i	f_i	F_i	x_i
[22 ; 34⟩	6	6	28
[34 ; 46⟩	12	18	40
[46 ; 58⟩	4	22	52
[58 ; 70⟩	12	34	64
[70 ; 82⟩	6	40	76

a) F

$\overline{X}=\dfrac{28\times6+40\times12+52\times4+64\times12+76\times6}{40}=52$

b) V

$f_2+f_3=16<18=F_2$

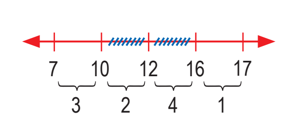
c) V

$Me=52$

Resolución de problemas

14.

I_i	h_i	H_i
[0; 7⟩	10%	10%
[7; 12⟩	15%	25%
[12; 17⟩	20%	45%
[17; 22⟩	10%	55%
[22; 27⟩	45%	100%

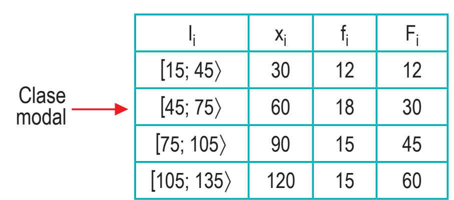


El porcentaje será:

$\dfrac{2}{5}\ .\ 15\%+\dfrac{4}{5}\ .\ 20\%\ =22\%$

Clave C

15. Completando el cuadro:



I_i	x_i	f_i	F_i
[15; 45⟩	30	12	12
[45; 75⟩	60	18	30
[75; 105⟩	90	15	45
[105; 135⟩	120	15	60

$W=30$

$M_o=45+30\left(\dfrac{(18-12)}{(18-12)+(18-15)}\right)$

$\therefore M_o=65$

Clave A

16. Clase modal = [11; 14⟩

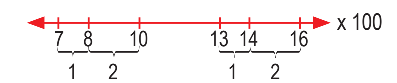
$M_o=11+3\left(\dfrac{20-10}{(20-10)+(20-5)}\right)$

$\therefore M_o=12{,}2$

Clave C

17. Del diagrama escalonado:

I_i	f_i	F_i
[400; 700⟩	20	20
[700; 1000⟩	30	50
[1000; 1300⟩	60	110
[1300; 1600⟩	45	155



El n.° de personas será: $\frac{2}{3}(30) + 60 + \frac{1}{3}(45) = 95$

Clave D

18. $3w = 30 - 12 = 18 \Rightarrow w = 6$

Completando el cuadro:

I_i	x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$
[6; 12⟩	9	5	5	45
[12; 18⟩	15	10	15	150
[18; 24⟩	21	17	32	357
[24; 30⟩	27	11	43	297
[30; 36⟩	33	7	50	231

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} f_i x_i}{n}$$

$$\overline{X} = \frac{45 + 150 + 357 + 297 + 231}{50}$$

$$\overline{X} = \frac{1080}{50} \qquad \therefore \overline{X} = 21{,}6$$

Clave A

Nivel 3 (página 83) Unidad 4

Comunicación matemática

19. $90 + 80 + 120 = 290$ toneladas

20. 1.er trimestre: $90 + 80 + 120 = 290$

2.° Trimestre: $85 + 75 + 110 = 270$

$\therefore \left(\frac{290 - 270}{290}\right) \times 100\% = 6{,}9\%$

Razonamiento y demostración

21. $X_{mín.} = 10$; $X_{máx.}$ 35; $\quad \frac{f_3}{f_2} = \frac{f_5}{f_1} = k \Rightarrow f_3 = kf_2 \wedge f_5 = kf_1$

$c = \frac{35 - 10}{5} = 5 \qquad f_4 = 2f_2$

I_i	f_i	F_i
[10 ; 15⟩	f_1	F_1
[15 ; 20⟩	f_2	F_2
[20 ; 25⟩	kf_2	
[25 ; 30⟩	$2f_2$	
[30 ; 35]	kf_1	

← $M_o \Rightarrow kf_2 > kf_1$
$f_2 > f_1$

$d_1 = kf_2 - f_2 = f_2(k - 1) \qquad d_2 = kf_2 - 2f_2 = f_2(k - 2)$

$\Rightarrow$ Mo $= 20 + 5\left(\frac{k-1}{2k-3}\right)$

$23 = 20 + 5\left(\frac{k-1}{2k-3}\right)$

$\frac{3}{5} = \frac{k-1}{2k-3} \Rightarrow k = 4$

Luego: $f_1 + f_2 + 4f_2 + 2f_2 + 4f_1 = 200$

$5f_1 + 7f_2 = 200 \Rightarrow f_2 = \overset{\circ}{5} \Rightarrow 5f_1 = 200 - 7f_2$

Además: $f_1 + f_2 > 30$

$5f_1 + 5f_2 > 150$

$200 - 7f_2 + 5f_2 > 150$

$50 > 2f_2$

$25 > f_2 \longrightarrow$ 20; 15; 10; 5

Reemplazando: $5f_1 + 7f_2 = 200$

12 20 ✓
19 15 ×
26 10 ×
33 5 ×

En la tabla de frecuencias:

I_i	f_i	F_i
[10 ; 15⟩	12	12
[15 ; 20⟩	20	32
[20 ; 25⟩	80	112
[25 ; 30⟩	40	152
[30 ; 35]	48	200

$\frac{n}{2} = 100$

← Me

$\text{Me} = 20 + 5\left(\frac{100 - 32}{80}\right) = 24{,}25$

a) V
b) V
c) F

22. $f(x) = 2x - 1$

x	1	2	3	4	...	499	500
f(x)	1	3	5	7	...	997	999

a) F
$R = 999 - 1 = 998$

b) V
$1 + 3{,}322\log(500) = 1 + 3{,}322\log\left(\frac{1000}{2}\right)$
$= 1 + 3{,}322(\log 10^3 - \log 2)$
$= 1 + 3{,}322(3 - 0{,}3)$
$= 1 + 3{,}322(2{,}7) = 9{,}96 \approx 10$

c) V
$X_{máx.} = 999$

Resolución de problemas

23.

I_i	X_i	f_i	F_i	h_i	H_i
		20	20		
[20; 24⟩		30	50		
[24; 28⟩	a	40	c	0,2	
[28; 32⟩		b			0,7
[32; 36⟩		60		0,3	1

$20 + 3w = 32 \Rightarrow w = 4$

$a = \frac{24 + 28}{2} = 26$

$\frac{60}{n} = 0{,}3 \Rightarrow n = 200$

$150 + b = 200 \Rightarrow b = 50$

$50 + 40 = c \Rightarrow 90 = c$

$\therefore a + b + c = 166$

Clave D

24. Dato: $n = 100$

I_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[300; 360⟩				
[360; 420⟩		30		0,3
[420; 480⟩	k	30 + k		
[480; 540⟩	2k	90		0,9
[540; 600⟩	10	100	0,1	1

$30 + 3k = 90 \Rightarrow k = 20$

Piden: $F_3 = 30 + 20 = 50$

Clave A

25.

I_i	x_i	f_i	F_i
[20; 26⟩	23	6	6
[26; 32⟩	c = 29	8	14
[a; 38⟩	35	n = 12	26
[38; 44⟩	d = 41	10	m = 36
[44; b⟩	47	8	44
[50; 56⟩	53	6	50

Sea w el ancho de clase, como se tiene 6 filas, entonces:
$6w = 56 - 20 = 36 \Rightarrow w = 6$
Analizando: $a = 32 \ \wedge \ b = 50$
$\therefore a + b + c + d + n + m = 32 + 50 + 29 + 41 + 12 + 36 = 200$

Clave B

26. $\sum f_i x_i^2 = 2\times 5^2 + 3\times 7^2 + 5\times 8^2 + 4\times 9^2 + 2\times 11^2 = 1083$

$$\overline{X} = \frac{5\times 2 + 7\times 3 + 8\times 5 + 9\times 4 + 11\times 2}{16} = \frac{129}{16}$$

Luego:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \overline{X}^2 = \frac{1083}{16} - \frac{129^2}{16^2} = 2,68$$

$$\sigma = \sqrt{2,68} = 1,64$$

Clave A

27.

I_i	f_i	x_i	$x_i f_i$	$x_i f_i^2$
[20; 30⟩	15	25	375	9375
[30; 40⟩	22	35	770	26 950
[40; 50⟩	48	45	2160	97 200
[50; 60⟩	40	55	2200	121 000
[60; 70⟩	25	65	1625	105 625

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{n} = \frac{7130}{150} = 47,53$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \overline{X}^2 = \frac{360\,150}{150} - \left(\frac{7130}{150}\right)^2 = 141,9$$

$$\sigma = 11,9$$

Clave A

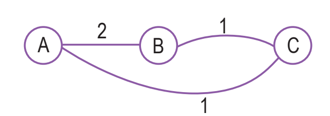
Nivel 1 (página 87) Unidad 4

Comunicación matemática

1. $4! = 24$

2. $12 \times 5 \times 99 = 5940$

3.



$2 \times 1 + 1 = 3$

Razonamiento y demostración

4. a) F

$2! + 3! + 4! = 2!(1 + 3 + 3 \times 4)$

b) V

$0! + 1! = 1 + 1 = 2 = 2!$

c) V

$C_0^1 = \frac{1!}{0! \times 1!} = 1 = A_0^1 = \frac{1!}{(1-0)!}$

5. a) V

$3!^2 = (1 \times 2 \times 3)^2 = 36 \geq 36$

b) V

$2!^3 + 3!^2 = 8 + 36 = 44 = \overset{\circ}{11}$

c) V

$5! = 3! \times 4 \times 5 = \overset{\circ}{3}$

Resolución de problemas

6. $C_4^{20} = \frac{20!}{4!(20-4)!} = \frac{20.19.18.17.16!}{4.3.2.1.16!}$

$C_4^{20} = 4845$

Por lo tanto, se puede formar 4845 comisiones.

Clave B

7. $P_5^{3;\,2} \times C_3^{10} \times C_2^6 = 10 \times 120 \,.\, 15$

$\therefore\ C_3^{10} \times C_2^6 = 18\,000$ maneras

Clave C

8. Se tiene una permutación circular.

$P_7^C = (7-1)! = 6! \Rightarrow P_7^C = 720$

Por lo tanto, se pueden sentar de 720 maneras.

Clave D

9. $5! \times (A_3^7) \,.\, (A_2^4) = 302\,400$

Clave D

10. Sea n el número de personas que asistieron a la reunión.

$\Rightarrow$ n.° estrechadas de mano $= C_2^n$

Del enunciado:

$$15 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$15 \,.\, 2!\,(n-2)! = n(n-1)(n-2)!$

$30 = n(n-1)$

$6 \,.\, 5 = n(n-1)$

$\Rightarrow n = 6$

Clave C

Nivel 2 (página 87) Unidad 4

Comunicación matemática

11. $P_{13}^{4;\,3;\,2;\,1;\,1;\,1} = \frac{13!}{4! \times 3! \times 2! \times 1! \times 1 \times 1! \times 1!}$

$= 21\,621\,600$

12. $P_6^{3;\,2;\,1} = \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = 60$

Razonamiento y demostración

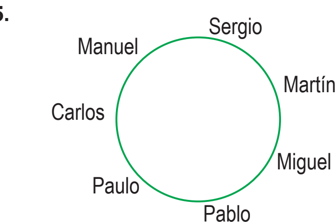
13. $CR_k^n = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \times k!} = \frac{(n+k-1)!}{[(n+k-1)-k]! \times k!}$

$= C_k^{n+k-1}$

14. $P_{n+1} = (n+1-1)! = n! = P_n$

Resolución de problemas

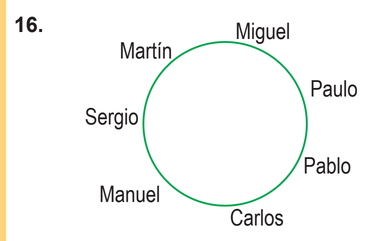
15.



$(7-1)! = 6! = 720$

Clave B

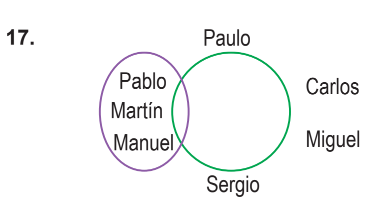
16.



$3! \times (5-1)! = 144$

Clave D

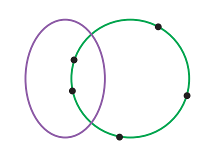
17.



$2 \,.\, (5-1)! = 48$

Clave B

18.



$C_3^4 \times C_2^3 \times (4-1)! \times 2 = 144$

Clave B

19. $\underbrace{C_1^6 \times C_1^6}_{\text{Total de parejas}} - \underbrace{6}_{\text{n.° de parejas}} = 30$

Clave B

20. Como no importa el orden se trata de una combinación:

$C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$

Se puede preparar 10 jugos surtidos.

Clave A

Nivel 3 (página 88) Unidad 4

Comunicación matemática

21. $\binom{4}{3} \times \binom{3}{1} \times 3! = 72$

22. $\binom{4}{2} \times \binom{3}{2} \times 3! = 108$

Razonamiento y demostración

23. Sea los elementos: $\underbrace{x_1; x_1; x_2; x_2; \ldots; x_k; x_k}_{2k\, =\, n \text{ elementos}}$

El número de permutaciones con repetición (N) es igual a:

$$N = P_n^{\overbrace{2;\,2;\,\ldots;\,2}^{k \text{ veces}}} = \frac{n!}{\underbrace{2! \times 2! \times \ldots \times 2!}_{k \text{ veces}}} = \frac{n!}{2^k} \in \mathbb{Z}^+$$

24. $x + y + z = 3$

0	0	3
0	1	2
0	2	1
0	3	0
1	0	2
1	1	1
1	2	0
2	0	1
2	1	0
3	0	0

$C_3^5 = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10$

Resolución de problemas

25. Se termina de sacar cuando se junten 6 soles o salga 2 veces consecutivas la moneda de S./1

Entonces tenemos los siguientes casos:

(1; 1) – (1; 2; 1; 2) – (1; 2; 1; 1) – (1; 2; 2; 1) – (2; 1; 1) – (2; 2; 1; 1) – (2; 1; 2; 1) – (2; 2; 2)

Por lo tanto son 8 maneras.

Clave C

26. De un grupo de 6 polos, compra solo 3 polos.

$C_3^6 = \frac{6!}{3!\,.\,3!} = 20$

Clave B

27. Se tiene:

4 camisas y 3 pantalones.

I. $4 \,.\, 3 = 12$ ...I(a)

II. $3 \,.\, 2 + 3 + 1 = 10$ ...II(e)

III. $3 \,.\, 2 + 2 + 1 = 9$ ...III(d)

IV. $3 \,.\, 2 + 1 = 7$ ...IV(c)

Clave E

28. $C_2^6 = \frac{6!}{2!\,.\,4!} = 15$

Clave B

29. $C_3^6 = \frac{6!}{3!\,.\,3!} = 20$

Clave C

30. Cinco frutas (1 es piña)

$C_4^5 = \frac{5!}{1!\,.\,4!} = 5$

Clave B

PROBABILIDADES

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 91) Unidad 4

Comunicación matemática

1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4. A) V

$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

B) F

$P(A) + P(A^C) = 1$

C) V

$0 \leq P(A) \leq 1$

5. Para cualquier evento A, se tiene: $A \cap \phi = \phi$ y $A \cup \phi = A$

Entonces, como A y ϕ son disjuntos, se cumple:

$\underbrace{P(A \cup \phi)} = P(A) + P(\phi)$

$P(A) \quad = P(A) + P(\phi)$

$\Rightarrow P(\phi) = 0$

Resolución de problemas

6. $\frac{C_3^3 \times C_2^6}{C_5^9} = \frac{15}{126} = \frac{5}{42}$

Clave B

7. $A = \{(1; 1)\}$

$n(\Omega) = 6 \times 6 = 36 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{36}$

Clave C

8. $\frac{C_1^2 \times C_2^3}{C_3^5} + \frac{C_2^2 \times C_1^3}{C_3^5} = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$

Clave E

9. $\frac{C_5^7}{C_5^{10}} = \frac{21}{252} = \frac{1}{12}$

Clave D

10. $\frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$

Clave C

Nivel 2 (página 91) Unidad 4

Comunicación matemática

11. n.° de cubos con las caras pintadas:

$2[10 \times 10 + 8 \times 10] + 8 \times 8 = 424$

Total de cubos: 1000

n.° de cubos con las caras no pintadas: $1000 - 424 = 576$

Luego:

$\frac{C_2^{424}}{C_2^{1000}} = \frac{89\,676}{499\,500} = \frac{2491}{13\,875}$

12. $\frac{C_1^{424} \times C_1^{576}}{C_2^{1000}} = \frac{244\,224}{499\,500} = \frac{6784}{13\,875}$

Razonamiento y demostración

13. Como: $\Omega = A \cup A^C$

Además: $A \cap A^C = \phi$ (mutuamente excluyente)

Se cumple:

$P(\underbrace{A \cup A^C}_{\Omega}) = P(A) + P(A^C)$

$P(\Omega) = P(A) + P(A^C)$

$1 = P(A) + P(A^C)$

$\Rightarrow P(A^C) = 1 - P(A)$

14. $B = \underbrace{\Omega} \cap \underbrace{B}$

$B = (A \cup A^C) \cap (A \cup B)$

$B = A \cup (A^C \cap B)$

Además:

$B \cap \phi = \phi$

$B \cap (A \cap A^C) = \phi$

$B \cap A \cap A^C = \phi$

$A \cap (B \cap A^C) = \phi$ (son mutuamente excluyentes)

Luego:

$P[A \cup (B \cup A^C)] = P(B)$

$P(A) + P(B \cup A^C) = P(B)$

$P(B \cup A^C) = P(B) - P(A)$

$\Rightarrow 0 \leq P(A^C \cup B)$

$0 \leq P(B) - P(A)$

$\therefore P(A) \leq P(B)$

Resolución de problemas

15. $\Omega = \{2; 3; 4; ...; 16\}$

$A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$

$P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

Clave D

16. $\overline{a\ \ b}$

a	b
1	0
2	1
⋮	⋮
9	9

$9 \times 10 = 90 \Rightarrow n(\Omega) = 90$

$A = \{12; 18; 24; 30; ... ; 96\}$

$n(A) = \frac{96 - 12}{6} + 1 = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$

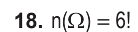
Clave E

17. $n(\Omega) = 36$

A ={(1; 3); (2; 2); (3; 1); (3; 6); (4; 5); (5; 4); (6; 3)}

$P(A) = \frac{7}{36}$

Clave E



18. $n(\Omega) = 6!$

$n(A) = 2 \times 5!$

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{2 \times 5!}{6!} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

Clave B

19. $\dfrac{C_6^{10} \times C_2^5}{C_8^{15}} = \dfrac{210 \times 10}{6435} = \dfrac{140}{429}$

Clave C

20. $\dfrac{7}{C_2^{14}} = \dfrac{1}{13}$

Clave D

Nivel 3 (página 92) Unidad 4

Comunicación matemática

21.

22.

Razonamiento y demostración

23. Se tiene:

$A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c = (A_1^c \cup A_2 \cup A_3)^c$

$= (A_1^C \cup A_3)^C$

$= A_1 \cap A_3^c = \phi \; (A_1 \subset A_3)$

Luego:

$P(A_1 \cap A_2^C \cap A_3^C) = P(\phi) = 0$

24. En general se cumple:

- $A \cup B = A \cup (A^C \cap B)$ y $A \cap (A^C \cap B) = \phi$
- $B = (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$ y $(A \cap B) \cap (A^C \cap B) = \phi$

Entonces, se cumple:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(A^C \cap B)$ ... (I)
- $P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$ ... (II)

Reemplazando (II) en (I) se tiene:

$P(A \cup B) = P(A) \cap P(B) - P(A \cap B)$

Resolución de problemas

25. $n(\Omega) = C_3^5 = 10$

$A = \{357; 379; 579\}$

- $2 < 3 < 12$, $4 < 5 < 10$, $2 < 7 < 8$ — Para la 1.ª terna se cumple.
- $2 < 5 < 16$, $4 < 7 < 14$, $2 < 9 < 12$ — Para la 2.ª terna se cumple.
- $2 < 5 < 16$, $4 < 7 < 14$, $2 < 9 < 12$ — Para la 3.ª terna se cumple.

$\therefore P(A) = \dfrac{3}{10}$

Clave D

26. Sea los eventos:

A: el tirador hace impacto en la 1.ª zona

B: el tirador hace impacto en la 2.ª zona

$\Rightarrow A \cap B = \phi$

Luego:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}45 + 0{,}35 = 0{,}80$

Clave E

27. $1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Clave E

28. $n(\Omega) = 20!$

$n(A) = 19!$

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{19!}{20!} = \dfrac{1}{20}$

Clave E

29. $\dfrac{C_3^4 \times \dfrac{48 \times 44}{2!}}{C_5^{52}} = \dfrac{4224}{2\,598\,960}$

Clave C

30. $\dfrac{4}{13} \times \dfrac{3}{12} + \dfrac{6}{13} \times \dfrac{5}{12} = \dfrac{42}{156} = \dfrac{7}{26}$

Clave A

MARATÓN MATEMÁTICA (página 93)

1.

I_i	f_i	F_i	x_i
[0; 4⟩	8	8	2
[4; 8⟩	18	26	6
[8; 12⟩	15	41	10
[12; 16⟩	6	47	14
[16; 20]	3	50	18
	n = 50		

$\overline{X} = \dfrac{2 \times 8 + 6 \times 18 + 10 \times 15 + 14 \times 6 + 18 \times 3}{50}$

$\overline{X} = 8{,}24$

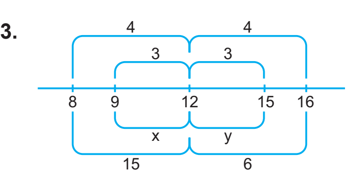
Clave C

2. $\dfrac{n}{2} = 25$

$\Rightarrow Me = 4 + 4\left(\dfrac{25 - 8}{18}\right) = 7{,}\widehat{7}$

Clave B

3.



$\dfrac{3}{4} = \dfrac{x}{15} \Rightarrow x = 11{,}25$

$\dfrac{3}{4} = \dfrac{y}{6} \Rightarrow x = 4{,}5$

$x + y = 15{,}75 \approx 16$

Clave E

4. $CR_3^9 = \dfrac{11!}{8! \times 3!} = 165$

Clave A

5. $C_1^3 \times C_4^7 = 105$

Clave A

6. $10 \times 11 = 110$

Clave E

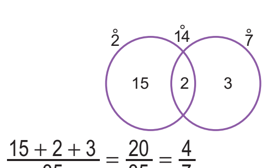
7. $P_6 = 6! = 720$

Clave D

8. $1 \leq 2n \leq 35$
$0{,}5 \leq n \leq 17{,}5$
n : 1; ...;17

$1 \leq 7m \leq 35$
$0{,}14 \leq m \leq 5$
m: 1; ...; 5

$1 \leq 14k \leq 35$
$0{,}07 \leq k \leq 2{,}5$
k : 1; 2



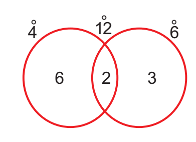
$\Rightarrow \dfrac{15 + 2 + 3}{35} = \dfrac{20}{35} = \dfrac{4}{7}$

Clave E

9. $1 \leq 4n \leq 35$
$0{,}25 \leq n \leq 8{,}75$
n: 1; 2; ...8

$1 \leq 6m \leq 35$
$0{,}17 \leq m \leq 5{,}83$
m: 1; 2; ...; 5

$1 \leq 12k \leq 35$
$0{,}08 \leq k \leq 2{,}92$
k: 1; 2



$\Rightarrow \dfrac{11}{35}$

Clave C